atl. Bibliothek
Regensburg

1. 170. 2

Philos. 2389. II.

Die ersten

Anfangsgründe

der

Geometrie

als Stoff

zu

Denk- und Sprechübungen

benützt.

Zum Gebrauche für angehende Lehrer in Bürgerschulen und den untern Classen der Gymnasien

herausgegeben

von

D. J. P. Pöhlmann.

Zweyten Bändchens erste Hälfte.

Fürth,
im Bureau für Literatur.
1824.

Die ersten
Anfangsgründe
der
Geometrie
als Stoff
zu
Denk- und Sprechübungen
benützt.

Zum Gebrauche für ungeübte Lehrer in Bürgerschulen
und den untern Classen der Gymnasien

herausgegeben
von
D. J. P. Pöhlmann.

Zweyten Bändchens erste Hälfte.

Fürth,
im Bureau für Litteratur.
1805.

Vorrede.

Ich habe aus verschiedenen Gegenden, sowohl innerhalb als ausserhalb Deutschlands, von sehr achtungswürdigen Männern die schriftliche Versicherung erhalten, daß sie diese Anfangsgründe der Geometrie bey ihrem Unterrichte sehr brauchbar und die hier aufgestellte Methode nachahmungswerth gefunden haben. Da ich nicht die Ehre habe, auch nur mit einem einzigen dieser Männer in näherer oder entfernterer Verbindung zu stehen; so kann ihr Lob nicht den Verdacht der Schmeicheley erregen: und da sie fast alle practische Erzieher sind, zum Theil ansehnliche Aemter bekleiden, und ihr Urtheil auf Erfahrung gründen; so würde es gewiß nur die höchste Arroganz wagen dürfen, diesem Urtheile die Vollgültigkeit abzusprechen. Ich habe demnach hinlängliche Gründe, zu glauben, daß dieses Werkchen mehrern Lehrern willkommen, folglich dessen Herausgabe kein ganz unnützes Unter-

nehmen sey. Getrosten Muthes, und ohne mich um den durchaus ungegründeten Tadel, womit der Leipziger Recensent *) das erste Bändchen zu bele-

*) Ein einziges Beyspiel wird hinreichend seyn, meinen Lesern zu zeigen, wie grundlos die Beschuldigungen dieses Mannes sind. „Bald, sagt er, spricht der Lehrer zu abstract und zu allgemein (z. B. S. 57): wenn eine gerade Linie auf einer andern so steht, daß die Nebenwinkel, die dann beyde entweder wirklich schon bilden, oder die erst noch durch die Verlängerung der einen von ihnen entstehen würden (wenn sie nicht so verlängert würden, daß sie sich berühren, so ist es nicht wahr) einander gleich sind, so sagt man —? K. Die eine Linie steht auf der andern senkrecht." Hier liegt es nun so offenbar am Tage, daß der Tadel, den das Einschiebsel des Recensenten enthält, ganz grundlos ist, daß ich gar nicht begreifen kann, wie ein Mann, der sich anmaßt, die ganze ehrwürdige Classe unserer Mathematiker eines Bessern belehren zu wollen, so etwas hinschreiben konnte. Denu wenn, was ich ja ausdrücklich sage, zwey Linien aufeinander stehen, so müssen sie ja auch nothwendig einander berühren und es sind dann nur zwey Fälle möglich, entweder dieser: $\perp$, oder dieser: L. Im erstern Falle sind Nebenwinkel wirklich schon vorhanden, im letztern würden aber welche entstehen, wenn

belegen für gut befunden hat, zu bekümmern, liefere ich daher die Fortsetzung desselben. Die zweyte Hälfte dieses Bändchens, welche das Ganze beschliessen wird, gedenke ich auf Michaelis dem Publikum zu übergeben, wenn

wenn eine von den beyden Linien, versteht sich, auf der Seite, wo der Berührungspunct liegt, verlängert würde. Wollte ich mit dem Recensenten sprechen: — — verlängert würde, bis beyde einander berühren; so enthielte der letztere Zusatz einen offenbaren Unsinn, indem ich jede dieser Linien in Ewigkeit verlängern könnte, ohne daß sie die andere je wieder berührte. Mit mehr Schein hätte der Rec. den Umstand tadeln können, daß ich die nähere Bestimmung: auf der Seite, wo der Berührungspunct liegt, weggelassen habe. Allein auch wenn er diesen Umstand urgirt hätte, würde ich haben erwiedern können: es versteht sich von selbst, daß die Verlängerung eines Schenkels vom Scheitel aus geschehen müsse, sobald von der Bildung eines Nebenwinkels die Rede ist. Uibrigens ist diese getadelte Stelle aus dem Zusammenhange herausgerissen und der Rec. hat recht sorgfältig verschwiegen, daß die Kinder von Seite 54 — 57. gewiß auf eine sehr zweckmäßige Art in den Stand gesetzt worden sind, sie zu verstehen.

mir anders kein unüberwindliches Hinderniß aufstößt.

Daß ich hie und da Sätze ohne Beweis angeführt habe, und in der Folge (wenn die Rede von der Aehnlichkeit der Figuren seyn wird) noch öfter anführen werde, werden wenigstens diejenigen nicht tadeln, die der Meynung sind, daß Kindern in Bürgerschulen überhaupt nur die Resultate der Geometrie, ohne Beweise, beygebracht werden sollen.

Die zu dieser Abtheilung gehörigen Nummern meines Versinnlichungsapparats sind folgende:

Nro. 12. Drey Kreise und ein Dreyeck mit verschiedenen Ausschnitten. Man erhält diese Nummer, wenn man sich fig. 13. 14. u. 15. Tab. VIII. auf ein ziemlich großes Blatt Papier verzeichnet, dieses auf Pappe klebt und dann die Stücke t und r fig. 13, die Stücke y und z fig. 14. und endlich den Peripheriewinkel fig. 15, und zwar letztern nach dem Bogen, der über den Mittelpunct geht, recht accurat ausschneidet.

Nro.

Nro. 13. Fünf gleiche und ähnliche Trapezien und eben so viel congruente rechtwinklichte Dreyecke (fig. 5 u. 6. Tab. VI.) Jedes dieser Dreyecke muß mit einem dieser Trapezien ein Quadrat (wie e und g fig 7. Tab. VI) bilden, wenn beyde Stücke mit ihren längsten Seiten gehörig an einander gelegt werden. Man erhält diese Stücke am richtigsten, wenn man sich ein Quadrat wie fig. 7. Tab. VI verzeichnet und es dann nach den angegebenen Linien, die immer aus der Mitte einer Seite in einen gegenüberstehenden Winkel gezogen sind, zerschneidet. Mit diesen zehen Stücken kann man unter andern den Pythagorischen Lehrsatz recht gut bestätigen. Man bildet nämlich damit zwey Quadrate, ein größeres und ein kleineres, und legt sie, wie in fig. 11. Tab. VIII. an die beyden Katheten des Dreyecks abf. Hierauf legt man dieses Dreyeck bey Seite und schiebt das Quadrat abcd hinauf, bis es in die Lage kommt, die die punctirten Linien anzeigen. Sodann dreht man das Dreyeck ebd um den Punct e, bis es die Lage von x hat. Nun ist das Viereck CBDE

fig. 12. Tab. VIII. entstanden. Jetzt nimmt man das Dreyeck ABD (fig. 12. Tab. VIII) von seiner Stelle weg und legt es an die untere Seite des Vierecks so, daß die Linie AB gerade in die Lage von DC kommt. Endlich wird das Dreyeck AEg um den Punct g so herumgedreht, bis seine Spitze A an dem Puncte D liegt. Durch diese Veränderung ist das Quadrat ABCD entstanden, welches die Quadrate der beyden Katheten des Dreyecks fab (fig. 11. Tab. VIII) in sich hält und dessen Seite gleich ist der Hypotenuse fb. — — Wer etwa einem oder dem andern seiner Freunde ein bischen Kopfbrechen verursachen und ihn in der Geduld üben will, der lege ihm die zehen Stücke dieser Nummer unter einander geworfen vor, mit dem Auftrage, ein einziges Quadrat daraus zusammen zu setzen. Hat dieser die Lage, die diese Theile gegen einander haben müssen, und die in der 7ten Figur der 6ten Tafel angegeben ist, nicht im Kopfe, so macht er wohl mehr als hundert Versuche, ehe er das verlangte Quadrat zu Stande bringt.

Nro.

Nro. 14. Acht rechtwinklichte, gleichschenklichte und congruente Dreyecke, wovon je zwey und zwey, wenn man sie mit der Hypotenuse an einander legt, ein Quadrat bilden, welches so groß ist, als ein Quadrat, das aus einem Trapez und einem Dreyecke der vorhergehenden Nummer entsteht.

Nro. 15. Ein rechtwinklichtes Dreyeck, in welchem der eine Kathet Ein Mahl, der andere aber zwey Mahl so lang ist, als die Seite des Quadrats, das aus zwey Stücken der vorhergehenden Nummer gebildet werden kann.

Nro. 16. Zwey Rectangula und vier Dreyecke, um damit fig. 1. Tab. IX. bilden zu können. Sind diese Stücke so beschaffen, daß sie, wenn sie wie in der erst erwähnten Figur zusammengesetzt sind, ein Quadrat bilden, das so groß ist, als dasjenige, welches aus den acht Stücken von Nro. 14. zusammengesetzt werden kann; so kann man beyde Nummern, nämlich die 14te und die in Rede stehende 16te, in ein einziges Quadrat vereinigen.

Um dieß am leichtesten zu bewerkstelligen, bilde man erstlich aus Nro. 14, dann aus Nro. 16. ein Quadrat, das nach der Diagonale in zwey gleiche Dreyecke zertheilt werden kann. Hierauf lege man die vier Dreyecke, die diese zwey Quadrate geben, mit ihren rechten Winkeln um einen einzigen Punct herum, wo dann die Diagonalen die Seiten eines neuen größern Quadrats werden. Wer diesen Handgriff nicht weiß und aus allen vierzehen untereinander geworfnen Stücken (der 14ten und 16ten Nummer) ein einziges Quadrat zusammensetzen soll, der möchte wohl mehrere Tage mit Versuchen zubringen, ohne zum Ziele zu kommen.

Nro. 17. Ein Kreis mit mehrern halbirten Sehnen.

Nro. 18. Zwanzig Dreyecke, welche alle mit den unter Nro. 13. angegebenen congruent seyn müssen. Man kann damit unter andern das Quadrat der Hypotenuse von Nro. 15. bilden. Wie man sie in diesem Falle an einander legen muß, zeigt

zeigt die bey diesen Dreyecken befindliche Kupfertafel.

Diese Stücke, die alle, mit Ausnahme von Nro. 12 und 15, von Holz gemacht, bunt bemahlt und in einem besondern Kästchen befindlich sind, kann ich jedem, der die Bezahlung unmittelbar an mich frankirt einsendet, oder mir eine sichere Anweisung an ein hiesiges, Nürnberger oder Fürther Handelshaus zuschickt, für 3 fl. rhn. oder 2 Rthlr. Sächs. überlassen. Wem es bequemer ist, diese, so wie die im ersten Bändchen angegebenen Stücke meines mathematischen Versinnlichungsapparats, durch den Buchhandel zu beziehen, der darf sie nur von der hiesigen Palmschen Handlung, welche die Versendung übernommen hat, verschreiben lassen. Auf diesem Wege kostet aber das Kistchen Nro. 1 (enthaltend die zum ersten Bändchen gehörigen Stücke) 5 fl. 45 kr. rhn., franco bis Leipzig aber 3 Rthl. 20 gr. sächs., und das Kistchen Nro. 2 (enthaltend die zu der vorliegenden Abtheilung gehörigen Stücke) 3 fl. 45 kr. rhn., und franco bis Leipzig 2 Rthlr. 12 ggr. sächsisch.

Um Irrthum, oder durch Anfragen entstehende Kosten und Zögerung zu vermeiden, beliebe jeder

Käu-

Käufer gleich genau zu bestimmen, ob er das Kistchen Nro. 1. oder Nro. 2. oder beyde zugleich verlangt. Buchhändler würden am besten thun, wenn sie sich beym Verschreiben folgender Formeln bedienten.

Pöhlmanns math. Apparat Nro. 1.
— — — — Nro. 2.
— — — — Nro. 1 u. 2.

Erlangen,
den 1sten Jun. 1805.

Der Verfasser.

In-

Inhaltsverzeichniß.

Fortsetzung des zweyten Abschnitts.

Seite

17ter Satz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die innern entgegenstehenden Winkel = 2 rechten Winkeln sind; so sind sie parallel. — — — 1

18ter Satz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die Wechselwinkel einander gleich sind; so sind diese Linien parallel. — 26

19ter Satz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß ein innerer einem äussern entgegenstehenden Winkel gleich ist; so sind sie parallel. — — — 31

20ster Satz. Durch einen gegebenen Punct eine Linie parallel mit einer andern gegebenen Linie zu ziehen. 35

21ster Satz. In einem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich. — 39

22ster Satz. Parallelen, die auf beyden Seiten von Parallelen begrenzt werden, sind einander gleich. — 47

23ster Satz. Wenn zwey Parallelen von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so sind die Wechselwinkel einander gleich. — — 52

24ster Satz. Wenn zwey Parallelen von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so ist ein äusserer Winkel dem innern ihm entgegenstehenden gleich. 57

25ster

Seite

25ster Satz. Wenn zwey Parallelen von einer dritten geraden Linie geschnitten werden; so sind die innern entgegenstehenden Winkel äqual zwey rechten. — 59

26ster Satz. Zwey gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, daß zwey innere entgegenstehende Winkel zusammengenommen entweder größer oder kleiner als zwey rechte Winkel sind, können nicht parallel seyn. — — 63

27ster Satz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß zwey innere entgegenstehende Winkel zusammengenommen kleiner als zwey rechte Winkel sind, so müssen diese Linien, wenn man sie genug verlängert, auf der Seite, wo die innern entgegenstehenden Winkel kleiner als zwey rechte Winkel sind, zusammenstossen. — — 63

28ster Satz. Die zwey innern entgegenstehenden Winkel, welche von zwey convergenten durch eine dritte geschnittenen Linien gebildet werden, können nicht 180 Grad halten. — — 63

29ster Satz. Die drey Winkel eines Dreyecks sind zusammengenommen äqual zwey rechten Winkeln. 74

30ster Satz. Der äussere Winkel eines Dreyecks ist so groß als die beyden innern ihm gegenüberstehenden zusammengenommen. — — 86

31ster Satz. Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleich sind; so sind auch die beyden diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten gleichgroß. — 92

32ster Satz. Ein Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwey gleiche und ähnliche Dreyecke getheilt. — — — 96

33ster Satz. Jedes Viereck, dessen gegenüberstehende Seiten einander gleich sind, ist ein Parallelogramm. 107

34ster Satz. Ein Parallelogramm zu beschreiben. — 112

35ster Satz. Zwey Parallelogramme, die einerley Grundlinie haben und zwischen einerley Parallelen stehen, sind einander gleich. — — 124

36ster

Seite

36ster Satz. Zwey Parallelogramme, die gleiche Grundlinien haben und zwischen einerley Parallelen stehen, sind einander gleich. — — 145

37ster Satz. Die Höhe eines Dreyecks oder Parallelogramms ist ꝛc. — — 150

38ster Satz. Dreyecke, welche einerley Grundlinie und gleiche Höhe haben, sind einander gleich. — 158

39ster Satz. Dreyecke, welche gleiche Grundlinien und Höhen haben, sind einander gleich. — 162

40ster Satz. Jeder Triangel ist die Hälfte eines Parallelogramms, das mit ihm einerley oder gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. — 166

41ster Satz. Ein Parallelogramm zu verzeichnen, das noch Ein Mahl so groß als ein gegebenes Dreyeck seyn soll. — — — 170

42ster Satz. Ein Dreyeck zu halbiren. — 171

43ster Satz. Ein Dreyeck ist so groß als ein Parallelogramm, das mit jenem gleiche Höhe, aber nur eine halb so große Grundlinie hat. — 173

44ster Satz. a. Ein Dreyeck in ein gleich großes Parallelogramm und umgekehrt ein Parallelogramm in ein gleichgroßes Dreyeck zu verwandeln. — 178

44ster Satz. b. In einem Parallelogramme sind die Ergänzungen der um die Diagonale liegenden Parallelogramme gleichgroß. — — 180

45ster Satz. Zwey Quadrate sind einander gleich, wenn in dem einen eine Seite so groß ist, als eine Seite in dem andern. — — 194

46ster Satz. Das Quadrat der Hypotenuse ist so groß, als die Quadrate der Katheten zusammengenommen. 197

47ster Satz. Ein Quadrat zu beschreiben, das noch Ein Mahl so groß seyn soll, als ein gegebenes. — 216

48ster Satz. Wenn eine Linie auf der Mitte einer Sehne senkrecht steht, so geht sie durch den Mittelpunct. 226

Seite

49ster Satz. Die Sehnen gleicher Bogen eines oder gleicher Kreise sind einander gleich. — 243

50ster Satz. Ein Winkel am Mittelpuncte ist doppelt so groß als ein Winkel an der Peripherie, der mit jenem auf einerley Bogen steht. — 247

51ster Satz. An einen Endpunct einer geraden Linie eine senkrechte Linie zu ziehen. — 258

52ster Satz. Ein Quadrat in einen Kreis zu beschreiben. 261

53ster Satz. Ein reguläres Sechseck in einen Kreis zu beschreiben. — — 267

54ster Satz. Wenn man in die Spitzen eines regulären Polygons die Halbmesser des Kreises zieht, in welchen es beschrieben ist, so werden dadurch die Winkel desselben halbirt. — — 271

55ster Satz. Die Summe der Grade der Winkel eines Vielecks zu finden. — — 277

56ster Satz. Die Grade eines Polygonwinkels zu finden. 280

57ster Satz. Ein reguläres Fünfeck, wozu die Seite gegeben ist, zu beschreiben. — — 282

Fort=

Fortsetzung des zweyten Abschnittes.

Siebenzehnter Satz.

Lehrsatz mit vorausgeschickten Erklärungen und Grundsätzen.

L. Heinrich, ziehe doch einmahl hier auf unserer schwarzen Tafel ein Paar gerade von der Linken nach der Rechten zu laufende *) Linien, welche von einer dritten, aber ebenfalls geraden, Linie durchschnitten werden. K. (zeichnet Fig. 1. Tab. I.).

L. Wer von euch kann mir den sagen, was Heinrich jetzt thut? K. Er zieht auf unserer schwarzen Tafel ein Paar — — durchschnitten werden.

L. Nun will ich alle diese Linien und die Winkel, die sie bilden, mit Buchstaben bezeichnen. — So! Wer nennt mir denn jetzt die schneidende Linie? K. EF.

L. Aber wer nennt die durchschnittenen Linien? K. AB und CD.

L. Wie

*) Diese Bestimmung ist ganz ausserwesentlich und steht wiederum nur hier, um den Schülern Gelegenheit zu geben, einen längern Satz ins Gedächtniß zu fassen.

L. Wie viel Winkel bilden denn diese 2, von einer 3ten durchschnittenen, Linien zusammen? K. Acht *).

L. Da die Lage der jetzt entstandenen 8 Winkel gegen einander sehr verschieden ist, so giebt man ihnen auch verschiedene Benennungen, die ihr jetzt lernen sollt. Vier von ihnen heißen innere, und die vier übrigen äußere Winkel. Nennt mir doch diejenigen, für welche, eurer Meynung nach, die Benennung: innere Winkel, passend ist. K. q, r, s, t.

L. Richtig! das sind die 4 innern Winkel. Aber warum mögen sie wohl diese Benennung führen? K. Vielleicht weil sie innerhalb der durchschnittenen Linien (innen zwischen den Linien AB und CD) liegen.

L. Die-

*) Will man das Nachdenken der Kinder noch mehr beschäftigen und ihre Erfindungskraft üben, so kann man die Lection so anfangen: Wer kann 3 gerade Linien so mit einander verbinden, daß sie 8 Winkel bilden? K. (versuchen und finden vielleicht Fig. 1. Tab. I.) L. Ihr wißt schon, daß, wenn man eine Linie durch eine andere hindurchzieht, man sagt: beyde Linien schneiden einander. Wie müßtet ihr euch nun ausdrücken, wenn ihr sagen wolltet, wie man 3 gerade Linien gegen einander stellen muß, wenn sie 8 Winkel bilden sollen? K. Man muß sie so stellen, daß 2 davon von der dritten geschnitten werden. L. Recht! Ihr habt also hier 2 gerade Linien durch eine dritte geschnitten. Welches ist denn die schneidende Linie? K. EF. L. und welches sind die durchschnittenen? K. AB und CD.

L. Diese Lage ist allerdings der Grund ihrer Benennung. Ihr könnt nun ein Merkmahl angeben, wodurch ihr die innern Winkel, die diese 3 Linien bilden, einem Andern kennbar machen, oder ihrer Lage nach, also ohne Buchstaben zu Hülfe zu nehmen, beschreiben könnt. Wenn also jemand fragte: was für Winkel versteht ihr denn hier bey dieser Figur unter den innern Winkeln? so würdet ihr wahrscheinlich darauf antworten —? K. Diejenigen, welche innerhalb der durchschnittenen Linien liegen.

L. Diese Antwort wäre richtig. Nun könnt ihr mir gewiß auch diejenigen Winkel hier mit Buchstaben nennen, für welche die Benennung: äußere Winkel, paßt. K. o, p, u, v.

L. Recht so! Aber warum mögen wohl diese Winkel äußere Winkel heißen? K. Weil sie außen (außerhalb der durchschnittenen Linien) liegen.

L. Freylich! Wie werdet ihr nun antworten, wenn ich frage: was für Winkel belegt ihr hier in dieser Figur mit dem Namen äußere Winkel? K. Diejenigen, welche außerhalb der durchschnittenen Linien liegen.

L. Jetzt will ich einen Satz aussprechen, gebt recht Achtung und seht, ob er wahr oder falsch ist. Wenn man zwey gerade Linien durch eine dritte schneidet, so entstehen 8 Winkel, wovon diejenigen, welche auf der einen Seite der schneidenden Linie liegen, innere, und diejenigen, welche auf der andern Seite dieser Linie (derselben) liegen, äußere Winkel heißen. K. Dieser Satz (der letzte Theil dieß Satzes) ist falsch.

L. Wer kann mir diesen ganzen Satz wiederhohlen, aber so, daß keine falsche Behauptung darinn vorkommt? K. Wenn man zwey gerade Linien durch eine dritte schneidet, so entstehen 8 Winkel, wovon diejenigen, welche zwischen den durchschnittenen Linien (innerhalb der durchschnittenen Linien) liegen, innere, und diejenigen, welche außerhalb dieser Linien liegen, äußere Winkel genannt werden.

L. Recht so! Nun will ich sehen, wer noch von euch diesen Satz ohne Fehler nachsagen, und mir zugleich an der Tafel, die Gegenstände, die er jedesmahl nennt, zeigen kann. K. Wenn man zwey gerade Linien (hier zeigt das Kind auf die Linien AB und CD) durch eine dritte schneidet (hier zeigt es auf EF); so entstehen 8 Winkel (hier werden die Winkel o, p, q, r, s, t, u, v gezeigt), wovon diejenigen rc.*)

L. Jetzt

*) Es kostet viel Mühe, alle Kinder dahin zu bringen, daß sie diesen und ähnliche Sätze gehörig nachsagen. Aber eben dieß ist ein Beweis von der Nothwendigkeit, dergleichen Sprechübungen, deren Stoff Dinge sind, die vor die Anschauung gebracht werden können, anzustellen. Denn dadurch werden die Kinder angewöhnt, eine bald längere, bald kürzere Reihe von Vorstellungen in der nöthigen Verbindung in ihrer Seele auf einander folgen zu lassen und sie den Regeln der Sprachlehre gemäß mit Worten bestimmt auszudrücken, ohne jedoch, was die Anschauung verhindert, papageymäßig Worte ohne Sinn herzusagen. Diesem noch in den meisten Bildungsanstalten mit eisernem Scepter herrschenden Unwesen, die Kinder Worte, denen

L. Jetzt möchte ich wohl wissen, ob keins von euch diese Figur (auf Fig. 1. Tab I. zeigend) in einer andern Lage verzeichnen und mir dann die innern und äußern Winkel nennen kann. K. (zeichnen die Figur vielleicht so, daß AB und CD vertical auf der Tafel stehen und nennen dann die Winkel).

L. So ist es recht! Jetzt paßt einmahl wieder recht auf, ich will euch einen gewissen Befehl geben, und sehen, wer ihn am ersten befolgen kann. Nennt mir zwey innere Winkel, wovon der eine auf der einen, der andere auf der andern Seite (diesseits und jenseits) der schneidenden Linie liegt, die aber nicht Nebenwinkel sind. K. (nennen entweder q und t, oder r und s).

L. Außer q und t (r und s) sehe ich noch 2 Winkel, welche die von mir angegebenen Merkmahle haben: wer nennt sie? K. r und s (q und t).

L. Ihr habt die Winkel, die ich genannt wissen wollte, wirklich genannt, ihr habt sie also an den Merkmahlen, die ich von ihnen angab, erkannt. Jetzt gieb du, Heinrich, mir einmahl den nämlichen Befehl, den ich euch vorhin gab, und ihr Andern seht, ob ich ihn pünctlich befolge. K. Nennen Sie zwey innere Winkel, wovon der eine diesseits, der andere jenseits der schneidenden Linie liegt, die aber keine Nebenwinkel sind.

nen keine Vorstellungen oder Begriffe in ihrer Seele entsprechen, hersagen zu lassen und sie dann glauben zu machen, als wüßten sie etwas, sollte man aus allen Kräften zu Leibe gehn, um es von seiner Stelle zu vertreiben.

L. q und r sind zwey innere Winkel, wovon der eine auf der rechten der andere auf der linken Seite, der eine also diesseits, der andere jenseits der schneidenden Linie liegt. K. Aber das sind ja Nebenwinkel!

L. Das ist wahr! Da werde ich wohl s und t nennen müssen? K. das sind ja auch Nebenwinkel.

L. Da habt ihr wieder Recht! Nun da will ich t und o nennen. K. Das sind ja nicht 2 innere Winkel.

L. Sagt mir doch noch Ein Mahl, welche Merkmahle die Winkel, die ich nennen soll, haben müssen, damit ich endlich die rechten treffe. K. Es sollen 1) 2 innere Winkel seyn, davon muß 2) der eine diesseits etc. und 3) dürfen es keine Nebenwinkel seyn.

L. Diese 3 Merkmahle werden sich wohl an q und t und r und s befinden? K. Freylich!

L. Nun merkt wieder recht auf, ich will euch sagen, wie man Winkel, die diese 3 Merkmahle haben, nennt. Wechselwinkel heißen sie, weil sie ihrer Lage nach mit einander abwechseln, so, daß wenn der eine oben und rechter Hand liegt, sich der andere unten und linker Hand befindet, oder wenn der eine oben linker Hand liegt, der andere unten zur Rechten befindlich ist. Wenn ich nun sage: nennt mir die Wechselwinkel dieser Figur (auf Fig. 1. Tab. I. zeigend), so werdert ihr nennen —? K. q und t, r und s.

L. Recht! Das sind zwey Paar Wechselwinkel. Jetzt sagt mir aber auch, was man unter Wechselwin-

winkeln versteht. K. Zwey innere Winkel, wovon der eine ꝛc.

L. Gut! Jetzt seht einmahl die nämliche Figur, die hier steht (Fig. 1. Tab. I.), hier an, wo sie in einer andern Lage verzeichnet ist*), an, und sagt, ob da wohl auch Wechselwinkel vorhanden sind. K. Ja wohl.

L. Nennt mir sie. K. (nennen sie ohne Zweifel).

L. Nun versucht doch einmahl, 3 gerade Linien so mit einander zu verbinden, daß sie nicht wie hier (Fig. 1. Tab. I.) 8, sondern nur 4 Winkel bilden**). K. (finden ohne Zweifel Fig. 2. Tab. I. Sollten sie auf Fig. 4. kommen, so sage man, daß es noch eine Verbindungsart gebe, aus welcher 4 Winkel entstehen, und lasse sie Fig. 2. suchen).

L. Recht so! Nun bezeichnet diese Winkel mit Buchstaben, und sagt, ob in dieser Figur auch Wechselwinkel vorhanden sind, oder nicht. K. Ja, es sind auch welche vorhanden.

L. Nennt sie. K. w und z, x und y.

L. Gut! Nun verbindet doch 3 gerade Linien so mit einander, daß sie nur 2 Winkel bilden, deren Oeffnungen aber nach entgegengesetzten Richtungen liegen. K. (suchen, bis sie Fig. 5. finden).

A 4 L. Recht!

*) Ich setze voraus, daß Fig. 1. noch in verschiedenen Lagen an der Wandtafel verzeichnet stehe.

**) Ich gebe den Kindern diese Aufgabe, weil sie ihr Nachdenken beschäftigt und ihren Erfindungsgeist anregt.

L. Recht! Diese Figur wollte ich haben. Sollten wohl hier auch Wechselwinkel vorhanden seyn? K. Ja.

L. Nennt sie. K. x und o.

L. Nunmehr könnt ihr mir sagen, ob man durchaus 2 gerade Linien durch eine dritte schneiden müsse oder nicht, wenn man Wechselwinkel erhalten will. K. Das ist nicht durchaus nöthig.

L. Freylich nicht. Wer sagt mir den jetzt, auf wie viel Arten 3 gerade Linien verbunden seyn können, wenn sie Wechselwinkel bilden sollen? K. Auf 3 Arten.

L. Beschreibt mir diese 3 Verbindungsarten. K. 3 gerade Linien, welche Wechselwinkel bilden sollen, können mit einander verbunden seyn, 1) so, daß 2 von der dritten geschnitten und also 8 Winkel gebildet werden; 2) so, daß keine von der andern geschnitten wird und nur 4 Winkel entstehen; 3) so, daß nur 2 Winkel entstehen, deren Oeffnungen nach entgegengesetzten Richtungen zu liegen.

L. Das ist recht! Nun merkt, daß in allen diesen Fällen immer 2 Linien von einer dritten geschnitten würden, wenn man entweder eine oder alle 3 gehörig verlängerte. (Man zeige dieß den Kindern indem man in Fig. 2. und 5. die Linien verlängert, daß Fig. 1. entsteht). Nun will ich euch noch eine vierte Art zeigen, auf welche man 3 gerade Linien so verbinden kann, daß Wechselwinkel entstehen. Seht! so: Fig. 6. zeichnend). Welche Winkel sind hier Wechselwinkel? K. m und o.

L. Nun

L. Nun sagt mir, ob ihr in dieser Figur (Fig. 3. zeichnend) keine Wechselwinkel findet. K. Ey ja! o und p, q und m sind solche*).

L. Recht! Nun hoffe ich, daß ihr in der Folge, wenn in einer Figur Wechselwinkel aufzusuchen sind, diese immer bald finden werdet. Jetzt wollen wir an dieser Figur (Fig. 1. Tab. I.) noch ein Paar andere Winkel kennen lernen. Könnt ihr mir wohl ein Paar Winkel nennen, welche 1) auf einer und der nämlichen Seite der schneidenden Linie liegen, 2) keine Nebenwinkel, und 3) nicht alle beyde äussern Winkel sind? K. (nennen z. B. o und s).

L. Das sind allerdings ein Paar Winkel, welche die von mir angegebenen Merkmahle haben. Aber wer kann mir diese Merkmahle noch Ein Mahl angeben? K. Es sind Winkel, welche 1) auf einer und der nämlichen Seite der schneidenden Linie liegen, 2) keine ꝛc.

L. Findet ihr wohl nicht noch mehrere Paare von Winkeln, welche die nämlichen Merkmahle haben? K. q und u, q und s, p und t, r und v, r und t haben diese Merkmahle.

L. Richtig! Um dieser Merkmahle Willen führt jedes Paar dieser Winkel den Namen entgegenstehende Winkel. Wenn ich daher spreche: nennt mir ein Paar entgegenstehende Winkel, so nennt ihr — ? K. o und s, oder q und u, oder ꝛc.

 L. Gut;

*) Sollten Kinder nicht auf diese Antwort kommen, so verlängere man in Fig. 3. die Linie qp und nq und zeige ihnen die Übereinstimmung mit Fig. 1.

L. Gut! Sind denn wohl in diesen Figuren (Fig. 2 und 6 verzeichnend) auch entgegenstehende Winkel vorhanden? K. Ja wohl.

L. Nennt mir sie. K. w und y, x und z (in Fig. 2.) und n und o (in Fig. 6.)

L. Nun werdet ihr bemerkt haben, daß entgegenstehende Winkel so wohl zwey innere, als auch ein äußerer und ein innerer seyn können. Jetzt will ich einmahl sehen, wer mir folgende Sätze ohne Anstoß wird nach sagen können: q und s (auf diese Winkel zeigend) sind innere Winkel, weil sie innerhalb der durchschnittenen Linien AB und CD liegen; o und u sind äußere Winkel weil sie außerhalb der durchschnittenen Linien AB und CD liegen; r und s sind Wechselwinkel, weil sie immer auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linien EF gelegene Winkel, jedoch keine Nebenwinkel sind; q und s sind entgegenstehende Winkel, weil sie auf einer und der nämlichen Seite der schneidenden Linie liegen aber weder Nebenwinkel, noch alle beyde äußere Winkel sind.

Die Kinder üben sich nun der Reihe nach die vorhergehenden Sätze mit Fertigkeit, richtig und bestimmt herzusagen, wobey sie aber immer Fig. 1. vor Augen haben. Will man diese Sprechübung weiter fortsetzen, so lasse man sprechen: o und u sind keine innern Winkel, weil sie nicht innerhalb der durchschnittenen Linien, AB und CD liegen; t und o sind keine entgegenstehenden Winkel, weil sie nicht auf einer und der nämlichen Seite der schneidenden Linie liegen u. s. w. Ist es nöthig, die Lage der bisher beschriebenen Winkel und ihre Benennun-

nungen den Kindern noch mehr einzuüben, so bilde man — bloß um der Veränderung willen — Fig. 1. durch die Stäbe Nro. 5. nach, gebe sie den Kinden in die Hände und lasse sich bald ein Paar Wechselwinkel, bald ein Paar innere ꝛc. zeigen, und immer die Merkmahle der gezeigten angeben.

L., (welcher ein Paar Parallellinien an die Tafel gezeichnet hat). Diese Linien habe ich so verzeichnet, daß sie in allen ihren Puncten gleichweit von einander entfernt sind, daher nennen wir sie —? K. Parallellinien.

L. Nun will ich diese Linien auf beyden Seiten, so weit es unsere Tafel erlaubt, verlängern. — So! Scheint es euch wohl, daß sich diese Linien irgendwo einander nähern? K. Nein.

L. Sie nähern sich auch nirgends einander, und würden sich auch nicht einander nähern, wenn ich sie auf beyden Seiten, 10, 20 Stunden weit, ja so weit ich nur wollte, verlängerte. Da sich also Parallellinien bey ihrer Verlängerung einander nicht nähern, meynt ihr wohl, daß sie da am Ende doch wohl zusammenstoßen und wie diese Lini en hier (einen Winkel verzeichnend) einen Wi nkel bilden könnten? K. Nein.

L. Wie sollten sie auch zusammen stoßen, da sie sich nicht einmahl einander nähern. Ihr habt nun eine gewisse Eigenschaft der Parallellinien kennen gelernt: wer giebt mir diese wieder an? K. Parallellinien können sich bei ihrer Verlängerung

gerung auf keiner Seite einander nähern, also auch nie zusammen stoßen.

L. Dieser Satz ist ein Grundsatz, daher will ich ihn noch einige Mahle hersagen lassen, damit ihr ihn recht behaltet. Wer kann mir ihn hersagen? K. (wiederhohlen.)

L. Jetzt seht diese Linien (zwey gegen einander schief stehende Linien verzeichnend) an, und sagt mir, ob ihr sie auch für gleichlaufend haltet oder nicht. K. Wir halten sie nicht dafür.

L. Sie sind es auch nicht. Nun will ich diese Linien auch zu beyden Seiten verlängern, so weit es unsere Tafel erlaubt. — So! Haben sich diese Linien, bey ihrer Verlängerung, auch nicht einander genähert? K. O ja.

L. Blieb es nur bey der Näherung oder stießen sie endlich ganz zusammen? K. Sie stießen endlich ganz zusammen.

L. Und bey fernerer Verlängerung müssen sie, wie ihr hier seht, einander durchschneiden. Nun könnt ihr mir sagen, was geschieht, wenn man gerade Linien, die nicht mit einander parallel laufen, nach der Gegend, wo sie einander näher sind, gehörig verlängert. K. Sie stoßen endlich zusammen und bey fernerer Verlängerung ꝛc.

L. Und wie wird ihre Entfernung, wenn man sie auf der entgegengesetzten Seite verlängert? K. Immer größer.

L. Nun sagt mir, was ihr jetzt von geraden Linien, die nicht gleichlaufend sind, gelernt habt.

K. Ge-

K. Gerade Linien, die nicht gleichlaufend sind, müssen auf der Seite, wo sie einander näher sind, bey gehöriger Verlängerung zusammenstoßen, und wenn man fortfährt, sie zu verlängern, so schneiden sie einander. Verlängert man sie aber auf der entgegengesetzten Seite, so müssen sie sich immer mehr von einander entfernen.

L. Nun habt ihr mir abermahls einen Grundsatz gesagt, den ihr recht behalten müßt. Jetzt will ich hier ein Paar Linien *) verzeichnen, die nicht gleichlaufend sind, und ihr sagt mir noch Ein Mahl, was nach unserm erst gelernten Grundsatze geschehen muß, wenn ich sie hier auf der Seite, wo sie sich einander nähern, verlängere. K. Sie müssen endlich ꝛc.

L. (Die Linien bis an das andere Ende der Tafel verlängernd.) Ey! das trifft doch nicht zu. Diese Linien sind nicht zusammen gestoßen. K. Ja, Sie haben sie nur nicht weit genug verlängert.

L. Freylich! Wenn ich die Fläche dieser Tafel dahin zu (zeigend) vergrößerte und fortführe, diese Linien noch mehr zu verlängern, so würden sie allerdings endlich zusammen stoßen. — Nun merkt auch noch folgenden Grundsatz: Gerade Linien, die nie, weder auf der einen, noch

*) Man zeichne diese Linien an das eine Ende der Tafel so, daß sie sich einander noch nicht berühren, auch wenn sie bis an das andere Ende verlängert werden.

noch auf der andern Seite zusammenstoßen können, man mag sie verlängern so weit man will, sind gleichlaufend.

L. Hier verzeichne ich ein Paar gerade Linien und sage euch von ihnen, daß sie, man mag sie auf beyden Seiten verlängern so weit man will, nie zusammenstoßen können. Was könnt ihr nun von diesen Linien behaupten? K. Daß sie gleichlaufend seyn müssen.

L. Drückt mir den Schluß vollständig aus, den ihr jetzt gemacht habt. K. Gerade Linien, die weder auf der einen noch auf der andern Seite zusammenstoßen können rc. Dieses hier sind gerade Linien, welche rc. folgl. rc.

L. Wenn ich euch aber umgekehrt sage, daß diese Linien gleichlaufend sind, was könnt ihr dann von ihnen behaupten? K. Daß sie bey ihrer Verlängerung weder auf der einen noch auf der andern Seite jemals sich einander nähern können.

L. Auch hier habt ihr in Gedanken wieder einen Schluß gemacht, den ich vollständig von euch ausgedrückt zu hören wünsche. K. (drücken diesen Schluß aus).

L., (welcher Fig. 1. Tab. I. verzeichnet, dabey aber nur die Winkel r und t, q und s bemerkt hat). Wer kann mir wohl sagen, welchen Befehl ich euch hätte geben müssen, wenn ihr diese Figur hättet verzeichnen sollen? K. Machet (ziehet) zwey gerade Linien und schneidet sie mit einer dritten.

L. Gut!

L. Gut! Hier sind also zwey gerade Linien von einer dritten durchschnitten, und zwar — diesen Umstand merkt recht wohl — so, daß die beyden innern entgegen stehenden Winkel r und t zusammen genommen gerade zwey rechten gleich sind. Nun sagt mir geschwind, wie viel Grade zwey rechte Winkel haben. K. 180.

L. Gesetzt nun, der Winkel t hätte 80 Grade, wie viel müßte deren denn der Winkel r haben?*) K. Gerade 100.

L. Wenn aber t nur 60 Grad hielte? K. Dann müßte r deren 120 haben.

L. Und wenn ich aus den Scheiteln der Winkel t und r mit einerley Halbmesser Bogen beschreibe und sie in Gedanken zusammen setzte, den wie vielsten Theil von einer Kreislinie machten sie denn wohl aus? K. Den halben.

L. Woher wißt ihr dieses? K. Weil eine halbe Kreislinie das Maß von zwey rechten Winkel ist.

L. Recht! Daß dieses wirklich zutrifft, will ich euch hier zeugen.

Man nehme nun von Nro. 12. B den Kreisausschnitt t und lege ihn auf p von Nro. 12 A und spreche etwa: Hier sind 2 gerade Linien von einer dritten so geschnitten, daß die innern entgegen stehenden Winkel t und r gleich 2 rechten sind. Daher bildet das Maß des Winkels

*) Diese und zwey folgenden Fragen haben den Zweck, den Kindern recht deutlich zu machen, was es heisse der W. r + t = 2 rechten W.

kels t mit diesem Bogen hier, nämlich mit dem Maße des Winkels r gerade eine halbe Kreislinie. Denn diese Linie hier (zeigend) ist ein Durchmesser und dieser halbirt alle Mahl die Kreislinie.

Nun wollen wir sehen, ob wir nicht durch Schlüße und mit Hülfe einiger euch schon bekannten Sätze herausbringen können, wie groß die W. q und s zusammen genommen seyn müssen. Vor allem sagt mir, ob ihr außer r und t nicht noch ein Paar schon mit Buchstaben bezeichnete Winkel auffinden könnt, deren Gradezahl euch schon bekannt ist. K. Ey ja! s und t sind Nebenwinkel, daher müssen sie 180 Grade haben.

L. Richtig! Könnt ihr außer r und t und s und t nicht noch ein drittes Paar finden, von welchem euch gleichfalls die Zahl der Grade bekannt ist? K. q und r sind auch Nebenwinkel, also müssen sie auch zusammen genommen 180 Grad haben.

L. Nun könnt ihr mir ja wohl auch sagen, wie viel Grade die vier Winkel r, q, s, t, zusammen genommen haben. K. 360.

L. Wie vielen rechten Winkeln sind sie also gleich? K. Vieren.

L. Wenn nun r und t zusammen genommen so groß als zwey rechte Winkel sind, also 180 Grad haben, wie groß müssen demnach q und s zusammen genommen seyn? K. Auch so groß als zwey rechte.

L. Freylich! Denn wenn wir von vier rechten Winkeln zwey rechte oder 180 Grad abziehen, so bleiben übrig — ? K. Noch 2 rechte Winkel.

L. Da

L. Da ist also q so wohl, als s, ein rechter Winkel? K. Ey nein! Nur beide Winkel zusammen genommen sind so groß als zwey rechte.

L. Gut geantwortet! Wer kann mir denn nun wohl in einem zusammenhängenden Vortrage beweisen, daß q und s zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich seyn müssen, so bald nämlich ausgemacht ist, daß r und t die nämliche Größe haben, oder 2 rechten Winkeln gleich sind? K. Da q und r Nebenwinkel sind, so müssen sie zwey rechten Winkeln gleich seyn, weil alle Nebenwinkel $= 2 \llcorner$ sind. Und da s und t auch Nebenwinkel sind, so ꝛc. Zwey Mahl zwey rechte Winkel machen aber 4 rechte Winkel. Also müssen die Winkel q, r, s, t, $= 4 \llcorner$ seyn. Wenn wir nun von diesen 4 rechten Winkeln durch die Wegnahme von r und t 2 rechte Winkel abziehen, so müssen die übrigen beyden, q und s nämlich, zusammen genommen offenbar noch so groß als zwey rechte seyn.

L. Das war gut! Wie viel von euch können diesen Vortrag wiederhohlen? K. (wiederhohlen.)

L. Ob die Linien AB und CD parallel sind, oder nicht, das ist euch jetzt noch unbekannt, da ihr dieses mit dem Augenmaße nicht so genau beurtheilen könnt, daß ihr mit Gewißheit das Eine oder das Andere zu behaupten im Stande wäret. Wir wollen aber sehen, ob wir dieß nicht durch Schlüsse herausbringen können. Gesetzt, diese zwey Linien AB und CD wären nicht gleichlaufend, was müßte denn da geschehen, wenn man sie auf beyden Seiten weit genug verlängerte? K. Da müßten sie

endlich in der Gegend, wo sie sich einander nähern, zusammenstoßen.

L. Recht! Dieß sagt euch ein Grundsatz. Wie lautet er? K. Gerade Linien, die nicht gleichlaufend &c.

L. Nun wollen wir einmahl annehmen, AB und CD könnten auf der Seite, wo die Punkte B und D liegen, bey gehöriger Verlängerung endlich in einem Punkte, so wie diese Linien (ein Paar gegen einander schief stehende Linien verlängernd, bis sie zusammenstoßen) zusammenstoßen. Was würden sie den wohl, wenn dieses geschähe, mit der Linie tr für eine Figur bilden? K. Ein Dreyeck.

L. Würden die 3 Winkel dieses Dreyecks mehr oder weniger als 180 Grad betragen? K. Mehr.

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil schon die Winkel r und t zusammen genommen 180 Grad halten.

L. Richtig! Wenn also die Linien AB und CD auf dieser Seite hier (zeigend) bey gehöriger Verlängerung zusammen stoßen könnten, so müßten wir ein Dreyek bekommen, dessen 3 Winkel zusammengenommen mehr als 180 Grad betrügen. Nun merkt einen Satz, den ihr mir aber einstweilen nur auf mein Wort glauben müßt, weil ich ihn euch erst in der Folge beweisen kann*). In jedem Dreyecke, es

*) Ich anticipire diesen Satz deßwegen, weil ich durch Hülfe desselben den hier nöthigen Beweis für Kinder immer überzeugender machen konnte, als wenn ich ihn so führte, wie ihn Ebert geführt hat.

es sey beschaffen wie es wolle, können die 3 Winkel zusammengenommen nicht um ein Haar mehr oder weniger als 180 Grad betragen, und kein Mensch, ja nicht einmahl der liebe Gott ist im Stande, ein Dreyeck zu verfertigen, dessen 3 Winkel zusammengenommen etwa 179 oder 181 Grad betrügen, weil ein solches Dreyeck nicht möglich ist. Ferner merkt, daß ein Satz, aus welchem man eine Ungereimtheit herleiten, oder aus welchem man folgern kann, daß etwas Unmögliches doch auch möglich seyn müsse, nie wahr seyn kann, sondern alle Mahl falsch seyn muß. Jetzt sagt mir, ob der Satz: die Linien AB und CD können bey gehöriger Verlängerung gegen die rechte Hand zu endlich zusammenstoßen, wahr seyn könne oder nicht. K. Der kann nicht wahr seyn.

L. Warum denn nicht? K. Weil man aus ihm etwas Ungereimtes herleiten oder aus ihm folgern kann, daß etwas Unmögliches doch auch möglich seyn müsse.

L. Welche Ungereimtheit folgt denn aus dem erwähnten Satze? K. Daß man Dreyecke vorzeichnen könne, in welchen die drey Winkel zusammengenommen mehr als 180 Grad betragen.

L. Gut! Wenn nun der Satz: die Linien AB und CD können bey gehöriger Verlängerung gegen die rechte Hand zu zusammenstoßen, nicht wahr seyn kann, so muß das Gegentheil von ihm wahr seyn. Was müssen wir daher von den Linien AB und CD behaupten? K. Daß sie gegen die rechte Hand zu nicht zusammenstoßen können, wenn man sie auch noch so weit verlängerte.

L. Richtig! Aber wie? Wenn ich nun behaupte: diese zwey Linnien A B und C D können bey gehöriger Verlängerung auf der Seite, wo die Puncte A und C liegen, endlich zusammenstoßen? K. Das ist auch nicht möglich.

L. Warum haltet ihr dieses für unmöglich? K. Weil alsdann auch ein Dreyeck entstehen würde, dessen drey Winkel zusammen genommen mehr als 180 Grad hielten, indem ja schon q und s zusammen 180 Grad haben.

L. Das war recht mit Ueberlegung geantwortet. Da es nun ausgemacht ist, das die Linien A B und C D auf keiner Seite zusammenstossen können, wenn man sie auch noch so sehr verlängerte, so müssen wir von ihnen nach einem unserer gestern (vor kurzem) gelernten Grundsätze behaupten — nun was? K. Daß sie gleichlaufend seyn.

L. Gut! Wie lautet der Grundsatz, nach welchem ihr dieses behauptet? K. Gerade Linien, die nie zusammenstoßen können rc.

L. Nun sagt mir wieder, was wir gleich beym Anfange dieser unserer Untersuchung von den innern entgegenstehenden Winkeln r und t als ausgemacht annahmen. K. Daß sie zusammen genommen so groß als zwey rechte Winkel seyn.

L. Und was haben wir aus diesem Umstande geschloßen? K. Daß die Linien A B und C D bey ihrer Verlängerung nirgends zusammen stoßen können, also gleichlaufend seyn müssen.

L. Richtig! Gesetzt also, ihr wüßtet (Fig. 7. verzeichnend), daß hier die Winkel m und n zusammen

men genommen gerade so groß als zwey rechte wären, was würdet ihr dann von den Linien EG und FH behaupten können. K. Daß sie gleichlaufend seyn müßten.

L. Nun da sehe ich, daß euch ein Merkmahl bekannt ist, an dem ihr ein Paar gleichlaufende Linien so gleich erkennen könnt. Seyd ihr denn wohl aber auch im Stande, mir dieses Merkmahl anzugeben, und mir recht bestimmt zu sagen, wenn man von einem Paare gerader Linien mit Zuverläßigkeit behaupten darf, daß sie gleichlaufend seyn? K. Ja. Ein Paar gerade Linien sind gleichlaufend, wenn sie von einer dritten Linie so geschnitten werden können, daß die innern entgegenstehenden Winkel so groß als zwey rechte sind.

L. Das ist richtig! Wenn aber jemand nicht glauben wollte, daß in diesem (von euch erst angegebenen) Falle zwey Linien gleichlaufend seyn müssen, so müßtet ihr es ihm beweisen. Seyd ihr auch dieses zu thun im Stande? K. — *)

L. Ihr getraut euch, wie ich merke, noch nicht, diesen Beweis zu führen, hoffe aber, daß ihr ihn so gleich werdet führen können. Vor allem müßt ihr beweisen, daß die Winkel o und p zusammen genommen so groß als zwey rechte sind. Wer führt diesen Beweis? K. m und o zusammen genommen müssen zwey rechten Winkeln gleich seyn, weil es

*) Ich nehme den öfters vorkommenden Fall an, daß die Kinder hier schweigen.

Nebenwinkel sind; n und p müssen ebenfalls ꝛc. Zwey und abermahls zwey rechte Winkel machen aber zusammen vier rechte Winkel, also müssen m, o, n, u. p zusammen vier rechten Winkeln gleich seyn. Wenn man nun von diesen vier rechten Winkeln m und n, welche zusammen so groß alß zwey rechte sind, wegnimmt, so müssen noch zwey rechte in den beyden Winkeln o und p zusammen genommen übrig bleiben.

L. Das war recht! Da nun bewiesen ist, daß auch die Winkel o und p zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich sind, so kann man auch leicht beweisen, daß die Linien E G und F H bey noch so weiter Verlängerung nirgends zusammen stoßen können, folglich gleichlaufend seyn müssen. Wer beweist mir dieses? K. Wenn die Linien E G und H F nach der Gegend E F zu bey ihrer Verlängerung endlich zusammen stießen, so würden sie mit der Linie m n einen Triangel bilden, dessen drey Winkel zusammen genommen mehr als 180 Grad hielten (größer als zwey rechte wären), indem ja schon m und n 180 Grad halten, und dann der dritte Winkel auch noch eine gewisse Anzahl von Graden hätte. Nun aber ist ein solcher Triangel unmöglich, folglich ist es auch unmöglich, daß die Linien E G und F H bey noch so weiter Verlängerung zusammenstoßen. Aus dem nämlichen Grunde können sie aber auch nicht gegen G H zu, bey noch so weiter Verlängerung zusammenstoßen, sie müssen folglich gleichlaufend seyn.

L. Das war gut! Nun will ich sehen, wer von euch ganz ohne meine Beyhülfe wird beweisen

weisen können, daß die Linien EG und FH, die von einer dritten so geschnitten werden, daß die innern entgegenstehenden Winkel zusammen genommen gerade so groß als zwey rechte sind, gleichlaufend seyn müssen. K. (üben sich im gehörigen Vortrage des hier geforderten Beweises.)

L. Carl, ziehe einmahl auf unserer Tafel eine gerade Linie von der Linken zur Rechten. K. (zieht AB von Fig. 8.)

L. Nun errichte auf dieser Linie zwey senkrechte Linien. K. (thut dieses.)

L. Wer von euch kann mir sagen, was Carl jetzt gethan hat? K. Er hat auf der Linie AB zwey senkrechte Linien errichtet.

L. Gut! Ich kann also nunmehr sprechen: hier (hinzeigend) stehen zwey Linien auf einer dritten senkrecht. Sollten wohl in dieser Figur auch innere entgegenstehende Winkel vorhanden seyn? K. Ja wohl.

L. Welche sind es denn? K. o und p.

L. Richtig! Denn wenn wir CD und EF ein bischen verlängern so bekommen wir diese Figur wieder (Fig. 7. verzeichnend), nur mit dem Unterschiede, daß hier (Fig. 8.) die Linie AB eine etwas andere Richtung als in dieser Figur (Fig. 7.) hat. Die Winkel o und p sind aber eben so gut innere entgegenstehende, als die Winkel m und n, und bleiben es, wenn ich auch die Stücke DG und und FH, wie ich jetzt thue, wieder weglösche. Könnt ihr mir wohl sagen, zu welcher Art von

Winkeln der Winkel o gehört, oder was für ein Winkel o ist? K. Er ist ein rechter.

L. Warum behauptet ihr dieses? K. Weil die Linie CD auf AB senkrecht steht: denn wenn 2 Linien auf einander senkrecht stehen, so müssen sie ja einen oder 2 rechte Winkel bilden.

L. Gut! Da könnt ihr mir wohl auch sagen, was p für ein Winkel ist. K. Auch ein rechter.

L. Warum behauptet ihr dieses? K. Weil auch EF auf AB senkrecht steht.

L. Wie viel Grade müssen denn die Winkel o und p zusammengenommen haben? K. 180.

L. Richtig! Nun sagt mir doch, ob wohl die auf AB senkrecht stehenden Linien CD und EF bey ihrer Verlängerung endlich zusammenstoßen können. K. Das ist nicht möglich.

L. Aus welchem Grunde haltet ihr dieses für unmöglich? K. Weil 2 gerade Linien wenn sie von einer dritten so geschnitten werden können, daß die innern entgegenstehenden Winkel so groß als 2 rechte sind, bey ihrer Verlängerung nie zusammenstoßen können.

L. Das ist recht, und ich sehe, daß ihr Anwendung von unserm vorhin bewiesenen Lehrsatze machen könnt. Jetzt sagt mir, wie zwei Linien, welche senkrecht auf einer dritten stehen, gegen einander stehen müssen. K. Parallel.

L. Allerdings. Wie wolltet ihr denn wohl einem Andern bekannt machen, was ihr jetzt von zwey auf einer dritten senkrecht stehenden Linien

gelernt

gelernt habt? K. Wenn zwey Linien auf einer dritten senkrecht stehen, so müssen sie unter sich parallel seyn.

L. Dieser jetzt ausgesprochene Satz ist ein Zusatz zu dem vorhin erwiesenen Lehrsatze. Zusatz heißt nämlich jeder Satz, der schon in einem andern enthalten ist, oder unmittelbar aus demselben folgt. Ich will nun beyde Sätze, nämlich den Lehrsatz und diesen Zusatz, an die Tafel schreiben und einige Mahle herlesen lassen, damit ihr sie euch recht ins Gedächtniß prägt. — —

Jetzt sage man den Kindern, wie es kommt, daß man auf einem Reißbrette vermittelst einer Reißschiene (vorausgesetzt, daß alles akkurat gemacht sey) gleichlaufende Linien ziehen könne. Das Lineal der Schiene steht nämlich auf dem sogenannten Anschlage oder Kopfe senkrecht, und wenn dieser an die Kante des Reißbrettes recht genau angelegt wird, so steht jenes auch auf dieser Kante senkrecht. Werden nun Linien nach diesem Lineale gezogen, so müssen sie alle gegen die Kante des Reißbrettes, welche eine gerade Linie vorstellt, senkrecht stehen, folglich unter sich parallel seyn. Ferner errichte man auf einer geraden Linie ganz kurze senkrechte Linien und lasse diese so weit es die Umstände erlauben, verlängern, damit die Kinder sehen, daß die Erfahrung mit dem, was ihr Verstand als wahr erkannt hat, übereinstimmt.

Achtzehnter Satz.

Lehrsatz.

L. Wer kann mir denn wieder drei gerade Linien so mit einander verbinden, daß sie zusammen acht Winkel bilden? K. (werden nun ohne Anstand Fig. 1. oder 9. vorzeichnen.)

L. Wer kann mir gehörig ausdrücken, was Carl ꝛc. jetzt gethan hat? K. Er hat drey gerade Linien ꝛc.

L. Ich hätte euch noch durch andere Worte veranlassen können, die nämliche Figur zu verzeichnen. Wer weiß, wie ich deßhalb hätte sprechen können? K. Ziehet zwey gerade Linien und schneidet sie durch eine dritte ebenfalls gerade Linie.

L. Richtig! Fritz, bezeichne mir doch die Wechselwinkel. K. (bezeichnet.)

L. Weißt du auch noch, was Wechselwinkel für Merkmahle haben müssen? K. Ja, sie müssen ꝛc.

L. (Im Falle nicht schon Fig. 1, sondern etwa Fig. 9. dasteht.) Nun will ich diese Figur noch Ein Mahl, doch so verzeichnen, daß die Wechselwinkel t und q einander gleich sind. — So! Wer kann mir denn jetzt sagen, was für eine Figur an der Tafel steht, und was uns von gewissen in derselben vorkommenden Winkeln bekannt ist? K. Es stehen hier zwey gerade Linien, welche von einer dritten durchschnitten werden, und zwey in dieser Figur befindliche Wechselwinkel sind einander gleich.

L. Recht

L. Recht so! Wenn wir nun den Winkel q mäßen und fänden, daß er etwa 75 Grad hätte, wäre es nun noch nöthig, den Winkel t zu messen, um seine Größe zu erfahren? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil er dem Winkel q gleich ist, so muß er ja auch 75 Grad haben.

L. Freylich! Hier habe ich mit unsern Stäben (Nro. 5.) die nämliche Figur, die an der Tafel verzeichnet steht, gebildet, und mit Hülfe dieses Dreyecks (von Nro. 3.) kann ich zeigen, daß die Wechselwinkel einander gleich sind. (Man zeige dieß, indem man einen der spitzigen Winkel von Nro. 3, sowohl in den einen, als in den andern, der diesem Winkel gleich gemachten Wechselwinkel legt. Auch mit Nro. 12. kann man die Sache versinnlichen, wenn man den Kreisausschnitt t auf q von Nro. 12. A legt.) Jetzt sagt mir, wie mein Befehl lauten müßte, wenn ich wollte, daß ihr eine Untersuchung anstelltet, um zu erfahren, ob t und r zusammen genommen größer, oder eben so groß, oder kleiner als zwey rechte Winkel sind. K. Da müßten Sie sprechen: stellt eine Untersuchung an, um zu erfahren, ob ꝛc.

L. Diese Untersuchung, wollen wir auch wirklich anstellen. Wenn wir den Winkel q zu dem Winkel r addiren oder diese beyden Winkel zusammen nehmen, wie viel Grade müssen sie dann betragen? K. 180.

L. Wie lautet der Satz, der euch dieses sagt? K. Nebenwinkel ꝛc.

L. Wie verhalten sich also q und r zusammen genommen zu zwey rechten Winkeln? K. Sie sind so groß als diese (zwey rechte).

L. Wenn wir annehmen, daß der Winkel q 75 Grad hat, wie viel Grade muß da der Winkel r haben? K. 105.

L. Wie viel Grade muß nach unserer Annahme auch der Winkel t haben? K. Auch 75.

L. Warum behauptet ihr dieses? K. Weil er ja dem Winkel q gleich ist und dieser 75 Grad hält.

L. Gesetzt, ich nähme den Winkel q von dem Winkel r weg und setzte den Winkel t dafür zu r, wie viel Grade würden denn jetzt die beyden Winkel r und t zusammen genommen haben? K. 180.

L. Recht! Denn da der Winkel r sich immer gleich bleibt, wir mögen q oder t zu ihm addiren und die Winkel q und t einerley Größe haben, so wird in beyden Fällen Gleiches zu Gleichem addirt, welches also nach einem unserer Grundsätze geben muß —? K. Gleiche Summen.

L. Nun sagt mir geschwind, wie sich die Winkel t und r zusammen genommen zu den Winkeln q und r zusammen genommen verhalten. K. t und r zusammen genommen sind so groß als q und r zusammen genommen.

L. Aber wie verhalten sich t und r vereinigt zu zwey rechten Winkeln? K. Sie sind diesen gleich.

L. Ja wohl! Denn t und r vereinigt sind ja gerade so groß als q und r zusammen genommen, welche als Nebenwinkel 180 Grad oder 2 rechte W.

be-

betragen. Wer kann mir denn jetzt wohl sagen, aus welchem uns bekannten Umstande wir herausbringen konnten, daß t und r zusammengenommen gerade so groß als 2 rechte Winkel seyn müssen? K. Aus dem Umständen, daß die Wechselwinkel t und q einander gleich sind.

L. Wer kann mir jetzt ohne meine Beyhülfe beweisen, daß hier die beyden innern entgegenstehenden Winkel t und r zusammengenommen gleich 2 rechten seyn müssen, wenn die Wechselwinkel t u. q einander gleich sind? K. (Bringen diesen Beweis bey. Sollten einige dieses nicht können, weil sie etwa das Vorhergehende nicht recht verstanden hätten, so suche man es ihnen auf folgende Art verständlich zu machen. Man nehme Nro. 12. und sage etwa: so wie q und r zusammengenommen von einer halben Kreislinie, dem Maße zweyer rechten Winkel, begränzt werden, so werden auch die Kreisausschnitte t und r zusammen von einer halben Kreislinie begränzt, welches ihr seht, wenn ich den Kreisausschnitt q wegnehme und t an seine Stelle lege, woraus erhellet, daß t und r zusammengeonmmen gerade so groß als als 2 rechte W. seyn müssen).

L. Nunmehr seyd ihr gewiß überzeugt, daß in unserer vorliegenden Figur t und r zusammen genommen so groß als zwey rechte Winkel sind. Wenn ihr aber dieses wißt, so könnt ihr mir auch sagen, wie die Linien A B und C D gegen einander stehen. Wer sagt mir dieses? K. Sie sind gleichlaufend.

L. Nach welchem Lehrsatze könnt ihr dieses behaupten? K. Nach diesem: Wenn zwey grade Li-

Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die innern entgegenstehenden Winkel gleich zwey rechten sind; so ꝛc.

L. Gut! War uns denn vorhin, beym An- Anfange unserer Untersuchung schon bekannt, daß r und t vereinigt (Fig. 1.) zwey rechten Winkeln gleich sind? K. Nein.

L. Was war uns nur von dieser Figur bekannt? K. Daß die Wechselwinkel t und q einander gleich sind.

L. Gesetzt nun, ich sagte euch von dieser Figur (Fig. 8. verzeichnend), daß die Wechselwinkel o und F einander gleich seyn, was würdet ihr dann von den Linien CG und EH behaupten können? K. Daß sie gleichlaufend seyn müssen.

L. Diese Behauptung wäre in diesem Falle richtig! Und ich sehe, daß ihr nun an einem zweyten Merkmahle erkennen könnt, daß zwey Linien gleichlaufend seyn müssen. Und dieses Merkmahl ist? — K. Die Gleichheit zweyer Wechselwinkel. (Wenn zwey Wechselwinkel einander gleich sind.)

L. Gut! Jetzt sagt mir, wie ihr euch ausdrücken wollt, um einem Andern bekannt zu machen, was ihr erst gelernt habt. K. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten geschnitten werden und zwey Wechselwinkel einander gleich sind, so müssen die beyden Linien parallel seyn.

L. Dieser Lehrsatz ist richtig ausgedrückt, ich will ihn daher gerade so an die schwarze Tafel schreiben. — So! Nun will ich sehen, wer mir

diesen Lehrsatz in einem zusammenhängenden Vortrage beweisen kann. K. Wenn man q zu r addirt, so bekommt man zwey Winkel, welche zusammen genommen 180 Grad betragen, oder zwey rechten gleich sind. Diese nämliche Größe müssen aber auch t und r zusammen genommen haben, weil Gleiches zu Gleichem addirt gleiche Summen giebt. Sind aber die innern entgegen stehenden Winkel t und r zusammen so groß als zwey rechte, so müssen die Linien AB und CD nach einem schon geführten Beweise parallel seyn.

Neunzehnter Satz.

Lehrsatz.

L., (welcher Fig. 1. verzeichnet hat). Hier habe ich abermahls zwey gerade Linien durch eine dritte so geschnitten, daß der innere Winkel s dem äußern entgegen stehenden o gleich ist. Und nun wollen wir sehen, was wir aus diesem uns bekannten Umstande folgern können. Von dem Winkel o habe ich jetzt gesagt, daß ihm ein anderer gleich sey: welcher ist es? K. Der Winkel s.

L. Bemerkt ihr nicht noch einen Winkel, von dem ihr nicht etwa nach dem Augenmaße, sondern mit voller Gewißheit behaupten könnt, daß er dem Winkel o gleich seyn müsse? K. Ach ja! Der Winkel r muß ihm gleich seyn.

L. Wa-

L. Warum muß dieser dem Winkel o gleich seyn? K. Weil o und r Verticalwinkel sind und alle Verticalwinkel einerley Größe haben.

L. Richtig! Nun sagt mir aber doch einmahl den förmlichen und vollständigen Schluß, den ihr jetzt gemacht, und durch welchen ihr herausgebracht habt, daß r so groß als o ist. K. Alle Verticalwinkel sind einander gleich; o und r sind ꝛc. folgl. ꝛc.

L. Jetzt sagt, ob wir hier nicht den Fall haben, wo zwey Größen einer dritten gleich sind. K. Ja.

L. Welches sind denn die zwey Größen, die einer dritten gleich sind? K. Die Winkel s und r.

L. Und welches ist die dritte, welcher sie gleich sind? K. Der Winkel o.

L. Was könnt ihr, da ihr dieses wißt, nun von den Winkeln s und r behaupten? K. Daß diese einander gleich seyn müssen.

L. Das ist der Folgesatz von einem Schlusse, den ich vollständig in seiner eigentlichen Form zu hören wünsche. Wer getraut sich, mir ihn zu sagen? K. Wenn zwey Größen einer dritten gleich sind ꝛc.; s und r sind zwey Größen, welche ꝛc. folglich sind s und r einander selbst gleich.

L. Gut! Was könnt ihr nun aus dem Umstande, daß s und r einander gleich sind, weiter folgern? K. Daß die Linien AB und CD parallel seyn müssen.

L. Recht! Nun ist euch ein drittes Merkmahl, woran man Parallellinien erkennen kann, bekannt

bekannt geworden. Wie würdet ihr euch ausdrücken, wenn ihr dieses Merkmahl wieder einem Andern bekannt machen wolltet? K. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß ein innerer Winkel einem äußern entgegen stehenden gleich ist; so sind diese beyden Linien parallel.

L. Wer getraut sich wohl den Lehrsatz, den ihr ausgesprochen habt, an dieser Figur (man gebe Fig. 1. etwa die Stellung von Fig. 7.) zu beweisen? K. s ist gleich o nach unserer Annahme; r ist auch gleich o, weil ꝛc. Da nun s und r einem dritten Winkel gleich sind, so müssen ꝛc. Sind aber r und s einander gleich, so ꝛc.

L. Nun sind euch die drey Merkmahle, woran man Parallellinien erkennen kann, bekannt, und ihr könnt bey dieser Gelegenheit merken, daß dieser Merkmahle eben so viele sind, als der Merkmahle, woran man die Gleichheit und Aehnlichkeit zweyer Dreyecke erkennt. Um sie eurem Gedächtnisse recht einzuprägen, will ich sie euch an diesen Figuren noch Ein Mahl darstellen.

Man zeichne nun Fig. 10. 11. und 12. an die Tafel und sage, daß die Zeichen in Fig. 10 andeuten sollen: die zwey innern entgegenstehenden Winkel sind vereinigt = zwey rechten W., und daß in jeder der übrigen beyden Figuren die mit einerley Zeichen versehenen Winkel einander gleich seyn. Hierauf lasse man das eine und das andere Kind, welches etwa in den nächst vorhergehenden Unterredungen die Sätze noch nicht gehörig nach-

sagen konnte, sprechen: ich sehe hier (auf Fig. 10. zeigend) zwey gerade Linien (diese zeigend) welche von einer dritten (diese zeigend) so geschnitten werden, daß zwei innere entgegenstehende Winkel (diese zeigend) äqual (gleich) zwey rechten sind. Wenn dieser Satz von allen Kindern gehörig ausgedrückt (gleichsam von der Tafel abgelesen) werden kann; so lasse man sprechen: wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die zwey innern entgegenstehenden Winkel äqual zwey rechten sind; so sind diese beiden Linien parallel; hier sind zwey gerade Linien, welche von einer dritten so geschnitten werden, daß ꝛc. folglich ꝛc. — Eben so verfahre man bey den beyden folgenden Figuren, so nämlich, daß die Kinder erst sprechen: ich sehe hier ꝛc. und alsdann: Wenn zwey gerade Linien von einer dritten ꝛc.

L. Nun bemerkt noch, daß wir vom zweyten dieser Merkmahle aufs erste, und vom dritten aufs zweyte und von diesem wieder aufs erste zurückkommen, oder: daß das zweyte das erste und das dritte das zweyte und erste zur Folge habe, d. h. wenn die Wechselwinkel einander gleich sind, so folgt nothwendig daraus, daß auch zwey innere entgegenstehende Winkel = zwey rechten W. sind. Und wenn ein äußerer Winkel einem innern entgegenstehenden gleich ist, so folgt daraus, daß zwey Wechselwinkel einander gleich sind, und hieraus folgt wieder, daß ꝛc.

Jetzt macht euch zur Regel, immer nachzuforschen, ob nicht an zwey euch in der Folge vorkommenden geraden Linien, die durch eine dritte geschnitten, oder wie hier (Fig. 5.) verbunden werden, das eine oder das andere dieser Merkmahle entdeckt werden

den kann, weil ihr durch eine solche Entdeckung wieder auf neue Wahrheiten geleitet werden könnt.

Zwanzigster Satz.

Aufgabe.

L., (welcher die Linie B C und den Punct A von Fig. 13. verzeichnet hat.) Hier habe ich euch eine gerade Linie (B C) und einen Punct (A) außer ihr gegeben. Jetzt sagt mir, welche unserer Regeln ihr hier befolgen könnt. K. Wir können sie ja alle drey befolgen.

L. Das ist richtig! Wir wollen vor allem die erste befolgen. Was müßt ihr daher jetzt thun? K. Eine gerade Linie (gerade Linien) ziehen.

L. Zwischen welchen Puncten denn? K. Zwischen den Puncten A und B und A und C.

L. Was bekämen wir denn da für eine Figur? K. Ein Dreyeck.

L. Dieß wäre nichts Neues für uns; daher wollen wir nur Eine gerade Linie ziehen. Es ist gleichviel, ob wir sie von A aus nach dem Puncte B, oder C, oder auch nach einem andern in der Linie B C befindlichen Puncte ziehen. Wir wollen sie aber nach B ziehen. — So! Was haben wir denn jetzt bekommen? K. Einen Winkel.

L. Auch das ist nichts Neues; daher wollen wir diesen Winkel an den uns vorhin gegebenen Punct A über die Linie A B tragen oder, was einerley ist,

 wir

wir wollen an den Punct A einen Winkel setzen, der dem Winkel B gleich ist. Dieser neue anzusetzende Winkel soll aber gerade nach der entgegen gesetzten Richtung von dem Winkel B liegen. Wer getraut sich dieses zu thun? K. Ich ꝛc.

L. Nun thue dieses. Carl soll aber erst ordentlich sagen, was du jetzt thun wirst. K. Fritz ꝛc. wird den Winkel B an den gegebenen Punct A tragen und zwar so, daß er nach der entgegen gesetzten Richtung von dem Winkel B liegen wird. —

L., (nach dem Fig. 13. vollendet worden ist.) Jetzt haben wir etwas Neues bekommen, was unserer nähern Betrachtung werth ist. Wir haben nämlich zwey gerade Linien, die durch eine dritte verbunden sind. Wißt ihr noch, wonach ihr bey einer solchen Figur immer forschen sollt? K. Ja, wir sollen sehen, ob nicht eins von den drey Merkmahlen, woran man Parallellinien erkennen kann, vorhanden ist.

L. Gut! Nun befolgt hier diesen meinen euch gegebenen Rath. K. Der Winkel B und der Winkel A sind Wechselwinkel und einander gleich.

L. Und daraus folgt —? K. Daß die Linien DA und BC gleichlaufend seyn müssen.

L. Ganz recht! Nun wollen wir die Linie DA, welches der zweyte Schenkel des an A getragenen Winkels ist, auf der Seite von A noch etwas nach E verlängern. — So! Jetzt sagt mir, ob folgende Behauptung richtig ist oder nicht. Wir haben jetzt eine Linie durch einen gegebenen

Punct

Punct parallel mit einer andern gegebenen Linie gezogen. K. Diese Behauptung ist richtig!

L. Wie müßte ich denn sprechen, wenn ich Fritzen befehlen wollte, eben das zu thun, was ich gesagt habe, daß wir jetzt gethan haben? K. Da müßten Sie sprechen: Ziehe durch einen gegebenen Punct eine Linie parallel mit einer andern gegebenen Linie.

L. Könnt ihr mir den wohl sagen, unter welche Art von Sätzen der jetzt von euch ausgesprochene gehört? K. Unter die Aufgaben.

L. Recht! Nun will ich doch sehen, wer mir das Verfahren beschreiben kann, das wir bey der Auflösung dieser Aufgabe angewendet haben. Ihr dürft bei dieser Beschreibung nur immer diese Figur (Fig. 13.) vor Augen behalten, dann wird sie euch gewiß gelingen. K. Erstlich haben wir von dem gegebenen Puncte A eine gerade Linie ꝛc.

L. Diese Beschreibung war richtig. Nur merkt, was ich schon Ein Mahl erinnert habe, daß es nicht nothwendig war, die Linie AB von A gerade nach B zu ziehen, sondern wir hätten sie auch nach C, oder nach jedem andern beliebigen Puncte der gegebenen Linie BC ziehen können. Zur Uebung wollen wir diese Aufgabe jetzt mehrmahls noch auflösen und die von A aus zu ziehende Linie 1) nach dem Puncte C (Fig. 14) 2) nach dem Puncte D, 3) nach dem Puncte E ziehen.

Nun lasse man diese Aufgabe so auflösen, daß der Punkt A 1) mit C, dann mit D, endlich mit E verbunden werde. Dabey lasse man das auflösende Kind immer

 sagen,

sagen, **was** es thun soll, und **wie** es das Befohlne auszurichten habe. Z. B. Ich soll durch den gegebenen Punct A eine gerade Linie parallel mit der gegebenen Linie BC ziehen. Um dieses zu bewerkstelligen (diese Aufgabe zu lösen), ziehe ich von A eine gerade Linie nach C, den hierdurch entstandenen Winkel trage ich ꝛc.

Wird die Linie AD oder AC gezogen, so daß zwey Winkel entstehen, so sage man, daß es gleichviel sey, welchen von den beyden Nebenwinkeln man an den Punct A trägt, nur habe man darauf zu sehen, daß durch dieses Hintragen Wechselwinkel entstehen, beyde also nach entgegengesetzten Richtungen zu liegen kommen. Will man hiebey noch mehrere Sprechübungen anstellen, so kann man etwa folgender Massen verfahren: L. Carl, hier (fig. 13) habe ich einen Punct A und die Linie BC gegeben. Nun ziehe von dem Puncte A eine gerade Linie nach B, und wenn du dieses gethan haben wirst *), so trage den dadurch entstandenen Winkel B an den Punct A, aber so, daß er die entgegengesetzte Richtung von dem Winkel B habe. K. (ist im Begriffe dieses zu thun.) L. Warte und sage mir, was du jetzt thun wirst. K. Ich werde von dem Puncte A eine gerade Linie nach B ziehen, und wenn ich dieses gethan haben werde, so werde ich den dadurch entstandenen Winkel B ꝛc. L. Ihr andern, könnt ihr mir auch sagen, was Carl jetzt thun wird? K. Er wird von dem Puncte A ꝛc. und wenn er dieses gethan haben wird, so wird er ꝛc. L. Was wird denn wohl durch dieses Verfahren eigentlich bewirkt werden? K. Es wird durch den gegebenen Punct A eine Linie parallel mit

*) Ich übe auf diese Weise den rechten Gebrauch des fut. exact. ein.

mit der gegebenen Linie BC gezogen werden. L. Gut! Nun, Carl, thue, was du zu thun Willens bist. K. (vollzieht den Auftrag.) L. Nun hört mir zu, ich will euch erzählen, was Carl vor einigen Augenblicken that, und sehen, wer mir es auf eben diese Art nacherzählen kann. Nachdem Carl eine gerade Linie hier auf der Tafel von A nach B gezogen hatte, trug er den daraus entstandenen Winkel an den Punct A und gab ihm dabey die entgegengesetzte Richtung von dem Winkel B. — Wer kann mir nun das nämliche mit den nämlichen Worten erzählen? K. Nachdem Carl ꝛc.

L. Ihr seyd jetzt im Stande durch einen gegebenen Punct eine Linie parallel mit einer andern gegebenen zu ziehen. Nun will ich sehen, wer so geschickt ist, eine Linie mit dieser hier (eine gerade Linie verzeichnend) parallel zu ziehen, ohne eben einen Punct, durch den er sie ziehen soll, von mir zu erhalten. K. (kommen wenigstens bisweilen darauf, daß sie sich in diesem Falle einen beliebigen Punct wählen, übrigens aber wie in den vorigen Fällen verfahren müssen.)

Einundzwanzigster Satz.

Lehrsatz mit vorausgeschickter Erklärung.

L, (welcher Fig. 16. ohne die punctirten Linien verzeichnet hat). Hier habe ich den Winkel x so groß als den Winkel o gemacht, folglich die Linie AB mit CD parallel gezogen. Jetzt sagt mir doch, ob ihr keine unserer Regeln hier anwenden

und dadurch diese Figur in eine andere verwandeln könnt. K. Ja, wir können die erste anwenden und zwischen den Puncten A und C, dann zwischen B u. D gerade Linien ziehen.

L. Richtig! Wir wollen zuerst eine solche Linie von A nach C, dann eine von B nach D, diese jedoch mit AC parallel ziehen. Wer sagt mir nun, was wir jetzt thun werden? K. Wir werden ꝛc.

L. Wer getraut sich denn aber diese zwey Linien gehörig zu ziehen? K. (ziehen die Linien. Sollren sie, welches gewöhnlich der Fall ist, nicht darauf kommen, daß der Winkel m an den Punct D über die Linie AD getragen und nach B zu gerichtet werden müsse, so verfahre man etwa also:

L. Ich will die Linien AB und CD die euch irre machen, einstweilen weglöschen. — So! Jetzt haben wir die Linie AC mit welcher eine andere durch den Punct D parallel soll gezogen werden. Vom Puncte D ist schon eine Linie nach einem Punkte in AC gezogen, überlegt und sagt mir nun, was ferner zu thun sey, um die verlangte Linie zu erhalten. K. Da müssen wir den Winkel A (m) an den Punct D über die Linie AD tragen, und ihm die entgegen gesetzte Richtung von A (m) geben.

L. Gut! Thut dieses. K. (thun dieses.)

L, Nun haben wir an AC und BD gleichlaufende Linien. Jetzt verzeichne ich hier die Figur, die wir Anfangs hatten, nämlich die gleichlaufenden Linien AB und CD, die durch AD verbunden sind, noch Ein Mahl und gebe euch den Auftrag,

zwi-

zwischen den Puncten A und C, und dann zwischen B und D gleichlaufende Linien zu ziehen. K. (ziehen jetzt AC und BD).

L. So ist es recht! Aus welchem Grunde dürfen wir nun behaupten, daß die Linien AC und BD gleichlaufend seyn? K. Weil die Wechselwinkel m und n von uns einander gleich gemacht worden sind.

L. Und da ich die Wechselwinkel o und x einander gleich gemacht habe, so dürfen wir behaupten —? K. Daß die Linien AB und CD auch gleichlaufend seyn müssen.

L. Denkt euch die Linie AD weg und sagt, zu welcher Gattung von Figuren die Figur ABCD gehört. K. Zu den Vierecken.

L. Recht! Was wissen wir den von den gegenüberstehenden Seiten dieses Viereckes? K. Daß sie gleichlaufend sind.

L. Wir haben also hier ein Viereck, dessen gegenüberstehende Seiten gleichlaufend sind, d. h. mit einem Worte: wir haben hier ein Parallelogramm. Werdet ihr mir nun sagen können, was ein Parallelogramm ist? K. Ein Viereck, dessen gegenüberstehende Seiten gleichlaufend sind.

L. Recht! Die zwey Merkmahle: 1) vierseitige Figur, in der 2) die gegenüberstehenden Seiten parallel sind, faßt man in dem einzigen Worte Parallelogramm zusammen. So oft ihr also in der Folge von einer vierseitigen Figur, z. B. von dem Quadrate, von dem Rhombus darthun könnt, daß

die gegenüberstehenden Seiten parallel sind, so dürft ihr sie nennen —? K. Parallelogramm.

L. Diesen Namen merkt recht, denn er wird in der Folge öfters vorkommen, indem wir von Parallelogrammen mancherley zu sprechen haben. — Jetzt sagt mir, in wie viel Theile dieses Parallelogramm durch die Linie AD zerlegt wird. K. In zwey.

L. Und was für eine Figur ist jeder dieser Theile. K. Ein Dreyeck.

L. Richtig! Diese Figur ist gerade so in zwey Dreyecke zertheilt, wie dieses Stück Holz (Nro. 3. oder zwey Dreyecke von Nro. 13. zu einem Parall. vereinigt, vorzeigend). So oft euch zwey Dreyecke vorkommen, sagte ich einmahl, sollt ihr sehen, ob sich an ihnen keines der Merkmahle, woran man ihre Gleichheit und Aehnlichkeit erkennen kann, vorfindet. Thut doch dieses hier. K. (stellen die nöthige Untersuchung an. Finden sie nicht, was sie finden sollen; so frage man: welchem Dreyecke gehört denn die Seite AD zu. K. Sie gehört beyden zu.

L. Da hat also das Dreyeck 1, so will ich dieses hier nennen und deshalb eine 1 hineinschieben, eine Seite so groß, als dieses andere Dreyeck, welches ich 2 nennen will, (eine 2 in ABD schreibend). Nun seht, ob in dem Dreyecke 2 nicht ein Paar Winkel sind, welche einzeln genommen dieselbe Größe haben, als ein Paar andere in 1. K. Ey ja! x und o sind einander gleich, weil Sie

sie einander gleich gemacht haben, und m und n sind einander auch gleich.

L. Richtig! Wir haben also hier zwey Dreyecke, wo in dem einen eine Seite mit den anliegenden Winkeln so groß ist, als diese Stücke in dem andern. Um euch die Sache deutlicher zu machen, will ich diese zwey Dreyecke hier (Fig. 17. verzeichnend) einzeln verzeichnen und beyden einerley Lage geben, indem ich Nro. 2. davon so herum gedreht verzeichne, wie ich jetzt dieses hölzerne Dreyeck herstelle. [Man lege hier a und b von Nro. 3. zusammen, daß sie ein Parallg. bilden, bezeichne auf demselben mit auf kleine Papierschnittchen, die man nur etwas naß machen und aufkleben darf, geschriebenen Buchstaben die Winkel und Seiten eben so, wie sie in Fig. 16. bezeichnet sind, drehe dann das Dreyeck ABD herum, daß es auf die Seite AB zu stehen komme, wo es dann die Lage wie ACD (Fig. 16.) oder DBA (Fig. 17.) haben wird]. — — Seht, hier (Fig. 17.) sind die nämlichen zwey Dreyecke, in welche das Parallelogramm (Fig. 16.) zerlegt ist, in einerley Lage verzeichnet, damit euch das Auffinden und Vergleichen der gleichen Stücke leichter werde. Das △ ACD (Fig. 17.) ist Nro. 1. hier (Fig. 16.) und DBA (Fig. 17.) ist Nro. 2. von dieser Figur (Fig. 16.) Die Seite DA in den △ DBA (Fig. 17.) ist gleich —? K. Der Seite AD im △ ACD.

L. Warum behaupten wir, daß diese Seiten einander gleich sind? K. Weil AD die gemeinschaftliche Seite der beyden Dreyecke (Fig. 16.) da ist.

L. Gut!

L. Gut! Welche Winkel sind denn hier (Fig. 17.) in diesen beyden Dreyecken einander gleich? K. m ist gleich n, und o ist äqual x, aus den vorhin angegebenen Gründen.

L. Was folgt denn nun daraus, daß in dem einen dieser Dreyecke eine Seite mit den anliegenden Winkeln so groß ist, als diese Stücke in dem andern? K. Daß sie einander decken, also einander gleich und ähnlich seyn müssen.

L. Allerdings! Nun nennt mir hier (in Fig. 17.) die übrigen Seiten außer AD, die noch einander gleich seyn müssen. K. CD muß gleich BA und AC gleich DB seyn.

L. Woher wissen wir denn, daß immer zwey und zwey dieser jetzt genannten Seiten einander gleich seyn müssen? K. Daher, weil sie gleichen Winkeln gegenüber stehen.

L. Richtig! — Jetzt betrachtet einmahl diese Figur (Fig. 16.), in welcher, wie ihr schon wißt, diese beyden Dreyecke (auf Fig. 17. zeigend), so zusammen gelegt sind, daß sie ein Parallelogramm bilden, und sagt mir, welche Seiten in diesem Parallelogramme wohl einander gleich seyn müssen. K. Erst müssen die Seiten AB und CD, zweytens die Seiten AC und BD einander gleich seyn.

L. Und warum muß AB = CD seyn? K. Weil es die gleichnamigen Seiten zweyer gleichen und ähnlichen Dreyecke sind.

L. Warum muß aber AC = BD seyn? K. Ebenfalls deßwegen ꝛc.

L. Nun-

L. Nunmehr könnt ihr mir sagen; wie sich in diesem Parallelogramme die gegenüberstehenden Seiten zu einander verhalten müssen. K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Was ihr jetzt von diesem Parallelogramme behauptet habt, das kann man von einer jeden Figur dieses Namens behauptet, nämlich —? K. Daß in ihr die gegenüberstehenden Seiten einander gleich seyn müssen.

L. Ganz recht! Nun sagt mir, was wir erst ausmitteln mußten, ehe wir diese Wahrheit (diesen Lehrsatz) herausbringen konnten? K. Die Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyecke ACD und ABD (Fig. 16).

L. Nun will ich hier (Fig. 5.) verzeichnend abermahls 2 gerade Linien durch eine dritte so mit einander verbinden, daß die Wechselwinkel einander gleich sind, und sehen, wer von euch mir daraus auf die Weise, wie wir es vorhin gemacht haben, ein Parallelogramm wird verfertigen und dann beweisen können, daß in ihm die gegenüberstehenden Seiten gleich sind.

Man gebe theils Figuren wie die 5te, aber in verschiedenen Stellungen, theils lasse man die Kinder selbst solche verfertigen, dann daraus Parallelogramme bilden und endlich beweisen, daß die gegenüberstehenden Seiten darin einander gleich seyn müssen. Hiebey stelle man wieder folgende oder ähnliche Sprechübungen an: L. Carl, ich habe hier (auf fig. 5. zeigend) den Anfang zu einem Parallelogramme gemacht. Vollende es jetzt gar, und wenn du es vollendet haben wirst, dann sage mir, welche Figuren man mit diesem Namen be-

legt. K. (ist im Begriffe die Zeichnung zu vollenden.) L. Warte und sage mir erst, was du jetzt thun wirst. K. Ich werde ein Parallelogramm, wozu Sie schon den Anfang gemacht haben, vollenden, und wenn ich dieses gethan haben werde, so werde ich sagen, welche Figuren man ꝛc. L. Theodor, kannst du mir auch so vollständig sagen, was Carl jetzt thun wird? K. Er wird ꝛc. L. Nun, Carl, vollziehe meinen Befehl. K. (zeichnet.) L. Ihr Andern könnt ihr mir sagen, was Carl jetzt thut? K. Er vollendet ein Parallelogramm, das Sie bereits angefangen haben zu zeichnen. L. Auf wessen Befehl vollendet er denn diese Figur? K. Auf den Ihrigen. (Auf Ihren Befehl.) L. (nachdem Carl seinen Befehl vollzogen.) Kannst du mir denn erzählen, was du jetzt gethan hast, deine Erzählung aber, so wie wir gestern (neulich) gethan haben, mit dem Wörtchen nachdem anfangen? K. Nachdem ich ein Parallelogramm, wozu Sie den Anfang gemacht haben, vollendet hatte, sagte ich, welche ꝛc. L. Ihr Andern erzählt mir eben so, was Carl vor einigen Augenblicken that. K. Nachdem Carl ꝛc. L. Wie wollt ihr euch wohl ausdrücken, um einem Andern kund zu thun, 1) was Carl gethan hat, und 2) daß er es auf meinen Befehl gethan hat. K. Carl hat auf den Befehl unsers Lehrers ein von diesem angefangenes Parallelogramm vollendet, und alsdann gesagt, welche Figuren man mit diesem Namen belegt. — — L. Nun will ich sehen, wer im Stande ist, mir nach und nach solche Befehle zu geben, daß am Ende durch deren pünktliche Befolgung ein Parallellogramm entsteht. K. Ziehen Sie eine gerade Linie AB. L. (zieht). K. Nehmen Sie irgend wo einen Punct C an. L. (nimmt einen Punct an, aber so, daß er in die Linie AB, bey ihrer Verlängerung, fällt. K. Verbinden Sie diesen Punct durch eine

gerade

gerade Linie mit der Linie AB. L. thut dieses. Nun werden aber die Kinder merken, daß die verlangte Figur nicht herauskommt, einsehen, daß sie sich unbestimmt ausgedrückt haben, und einen bestimmtern Ausdruck suchen. Auf diese Weise fahre der Lehrer fort, sich vorsagen zu lassen, was er thun soll. Drücken sich die Kinder ferner unbestimmt aus, so bringe er sie durch eine unrichtige Verzeichnung, die jedoch ihrer Vorschrift gemäß ist, zur Einsicht dieses Fehlers, und leite sie an, den bestimmten Ausdruck zu suchen). — — L. Nun soll Carl ein Parallelogramm vorzeichnen, Heinrich soll ihm aber nach und nach das dabey zu beobachtende Verfahren vorsagen, und so oft jener (Carl) einen Theil davon verfertigt hat, soll er sagen, was er gethan hat. Heinrich. Ziehe eine gerade Linie AB. Carl. Nun habe ich eine gerade Linie AB gezogen. Heinrich. Nimm irgendwo einen Punct C an, aber so, daß er nicht in die Linie AB fällt, wenn man diese verlängert. Carl. Nun habe ich irgendwo einen Punct C angenommen, der aber nicht ꝛc. Heinrich. Ziehe aus dem Puncte C eine gerade Linie (unter einem beliebigen Winkel) auf AB. Carl. Ich habe jetzt aus dem Puncte C eine gerade Linie auf AB gezogen u. s. w.

Zweyundzwanzigster Satz.

Zusatz.

L., (welcher Fig. 18 ohne EF verzeichnet hat.) Welchen Namen wollt ihr denn dieser Figur geben, um anzuzeigen, daß sie vier Seiten hat, wovon immer

mer die gegenüberstehenden gleichlaufend sind? K. Parallelogramm. L. Und wenn ich sage: das ist ein Parallelogramm, so könnt ihr mir von den gegenüberstehenden Seiten etwas sagen; wer weiß noch, was? K. Daß sie 1) gleichlaufend, 2) einander gleich sind.

L. Richtig! Von welchen dieser Linien kann man den wohl sagen: es sind Parallellinien, die zwischen 2 Parallellinien stehen oder von 2 Parallellinien begrenzt werden? K. Von AC und BD und auch von AB und CD.

L. Gut! Drückt euch jetzt so aus, daß ein Anderer auch ohne meine Frage gehört zu haben, erfahren kann, was ihr jetzt von AC und BD behauptet habt. K. AC und BD sind Parallellinien, die zwischen 2 Parallellinien stehen.

L. Recht! Wie verhalten sich denn hier in diesem Falle die 2 Parallellinien AC und BD, die von 2 andern Parallellinien begrenzt werden, zu einander? K. Sie sind einander gleich.

L. Wie lautet der vollständige Schluß, von welchem ihr jetzt nur den Schlußsatz ausgesprochen habt? K. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich, AC und BD sind gegenüberstehende Seiten eines Parallelogramm, folglich ꝛc.

L. Recht so! Es ist also gewiß, daß hier 2 Parallellinien, welche von zwey andern Parallellinien begrenzt werden, einander gleich sind. Nun will ich zwischen den Parallellinien AB und CD noch eine dritte gerade Linie EF und zwar sowohl mit

AC als BD parallel ziehen. — Nun sagt mir, ob wohl AE und FC auch ein Parallelogramm ist. K. Ja wohl.

L. Warum behauptet ihr dieses? K. Weil diese Figur 4 Seiten hat, wovon die gegenüberstehenden gleichlaufend sind.

L. Wie muß sich also die Linie EF zu AC verhalten? K. Sie muß ihr gleich seyn.

L. Richtig! Sollte wohl aber die EF auch der BD gleich seyn? K. Allerdings.

L. Aus welchem Grunde könnt ihr dieses behaupten? K. Weil Sie EF auch parallel mit BD gezogen haben, so muß EBDF auch ein Parallelogram, folglich EF so groß als BD seyn.

L. Recht! So wie wir jetzt von zwey und dann von drey Parallinien, welche von zwey andern Parallellinien begrenzt werden, bewiesen haben, daß sie einander gleich seyn müssen, so können wir dieses von allen Parallellinien, welche von zwey andern gleichlaufenden Linien begrenzt werden, beweisen. Wir können daher den Satz der ein Zusatz zu unserm vorigen ist, aufstellen: Zwey oder mehr Parallellinien, die von zwey andern Parallellinien begrenzt werden, sind einander gleich. Wenn ihr diesen Satz recht gefaßt habt, so werdet ihr mir gleich sagen können, wie sich diese Linien hier (Fig. 19. verzeichnend), die alle unter sich gleichlaufend sind, und von den gleichlaufenden Linien AB und CD begrenzt werden, zu einander verhalten. K. Sie müssen alle einander gleich seyn.

L. Wie lautet der vollständige Schluß, wovon diese eure Antwort der Schlußsatz ist. K. Zwey oder mehr Parallellinien, die von 2 andern Parallellinien begrenzt werden, sind einander gleich; dieses hier (an der Tafel) sind Parallellinien, welche ꝛc. folglich ꝛc.

L. Recht so! Wißt ihr denn noch, wie diejenien Linien gegeneinander stehen, die auf einer dritten senkrecht stehen? K. Parallel.

L. Wie werden sich demnach alle zwischen zwey Parallelen befindliche senkrechte Linien zu einander verhalten? K. Sie müssen auch einander gleich seyn.

L. Wie wollt ihr euch ausdrücken, um das, was ihr durch diese eure Antwort behauptet, einem Andern kund zu thun? K. Alle zwischen zwey Parallelen befindliche senkrechte Linien sind einander gleich.

L. Richtig! Dieser Satz ist eine nothwendige Folge aus dem erst gelernten und dem neulich (S. 25.) vorgetragenen Zusatze nach welchem ꝛc. Zur Uibung im Schließen wollen wir den Satz: Alle zwischen zwey Parallelen ꝛc. durch zwey förmliche Schlüße erweisen. Ich sage euch, daß alle diese Linien (auf die Querlinien Fig. 19. zeigend) senkrecht auf AB stehen, nun zeigt mir durch einen förmlichen Schluß, daß sie untereinander parallel seyn müssen. K. Alle auf einer Linie senkrecht stehenden Linien sind unter sich parallel, diese Linien hier (auf der Tafel) stehen ꝛc. folglich ꝛc.

L. Nun

L. Nun beweist mir durch einen zweyten Schluß, daß diese Linien hier (Fig. 19.) alle einander gleich seyn müssen. K. Parallellinien, welche von zwey Parallelen begrenzt werden, sind einander gleich, dieses hier sind ꝛc. folglich ꝛc.

L. So war es recht! Jetzt will ich nur sehn, ob A. B. u. C*) diese Schlüsse auch machen können. — —

L. Nun sagt mir doch eure Meynung über folgende Behauptungen. Wenn ich von einer Seite dieses Tisches, dessen Flächen lauter Parallelogramme sind, bis zur gegenüberstehenden drey gleichlaufende Linien ziehe, so muß die mittlere die längste seyn.

Wenn ein Schreiner diese Stube, deren gegenüberstehende Wände gleichlaufend sind, brettern und seine Bretter alle senkrecht an eine Wand ansetzen will, so muß er immer, ehe er ein Bret legt, erst messen und sehen, wie weit beyde gegenüberstehende Wände von einander entfernt sind, um die Länge des Brettes darnach bestimmen zu können.

Wenn in einem Parallelogramm eine Seite 3, und eine andere 4 Zoll lang ist, so muß die 3te 5, und die 4te 2 Zoll lang seyn.

Wenn man die gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogramms weit genug verlängert, so stoßen sie endlich zusammen.

Wenn zwey Menschen in einem Garten, der ein Parallelogramm ist, mit immer gleicher Ge-

*) Man nenne hier die Namen der trägern und unachtsamern Schüler.

schwindigkeit von einer Seite zu der gegenüberstehenden gehen, und zwar so, daß ihre Wege parallel laufen, so kann der eine seinen Weg eher vollenden als der andere.

Dreyundzwanzigster Satz.

Lehrsatz.

L., (welcher Fig. 20. ohne EF und GH verzeichnet hat.) Hier habe ich zwey Parallellinien, die durch eine dritte OP geschnitten sind, verzeichnet und gleich ein Paar Wechselwinkel mit m und n bemerkt. Nun sinnt nach und seht, ob wir keine unserer Regeln hier anwenden und dadurch diese Figur verändern können, um vielleicht etwas Neues daran zu lernen. K. —

L. Fallen euch nicht ein Paar Puncte besonders auf? K. Ja, die Durchschnittspuncte E und H.

L. Auf jeder Linie kann man Puncte annehmen, wo man will, wir wollen daher auf CD den Punct F noch annehmen und dann eine unserer Regeln befolgen: welche? das könnt ihr mir sagen. K. Die erste.

L. Recht! Befolgt sie nun. K. (ziehn EF.)

L. Nun haben wir bey H noch einen Punct, von welchem aus wir auch eine gerade Linie nach einem Punte in der Linie AB ziehen können. Wir wollen dieses thun, diese Linie aber mit EF parallel ziehen, wo sich dann der Punct auf AB, wohin

von

von H aus eine gerade Linie gezogen werden soll, von selbst ergeben wird. Zieht also von H aus eine mit EF gleichlaufende Linie auf AB. K. (ziehen HG.)

L. Jetzt sagt mir, was EFGH (ohne EH) für eine Figur ist. K. Das ist ein Parallelogramm.

L. Warum müssen wir diese Figur so nennen? K. Weil EG mit FH und EF mit GH parallel läuft.

L. Wie verhalten sich denn wohl EG und FH zu einander? K. Sie sind einander gleich.

L. Woher kann man dieses wissen? K. Weil die gegenüberstehenden Seiten in einem Parallelogramme einander gleich seyn müssen.

L. Sind wohl noch ein paar gleiche Seiten in dieser Figur? K. Ja wohl, EF und GH sind einander gleich.

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil ꝛc.

L. Nun sagt mir doch, wie viel Theile durch die Linie EH aus dem Parallelogramm EGHF gemacht worden sind. K. Zwey.

L. Und was sind diese Theile für Figuren? K. Dreyecke.

L. Welchem dieser Dreyecke gehört denn die Seite EH zu? K. Beyden.

L. Nun forscht nach und seht, ob wohl diese beyden Dreyecke einander gleich und ähnlich sind oder nicht. K. Sie sind einander gleich und ähnlich.

L. Welches Merkmahl ihrer Gleichheit und Aehnlichkeit ist denn vorhanden? K. Die drey Seiten in dem einen einzeln genommen, sind so groß, als die drey einzelnen Seiten im andern.

L. Gut! Nennt mir doch einmahl die gleichnamigen Seiten dieser zwey Dreyecke. K. EF und GH, FH und EG, EH in dem einen und EH in dem andern.

L. Nun nennt mir die Winkel, welche den gleichen Seiten EF und GH gegenüber liegen. K. n und m.

L. Wie verhalten sich denn in zwey gleichen und ähnlichen Triangeln die Winkel, welche gleichen Seiten gegenüber liegen, zu einander? K. Sie sind einander gleich.

L. Was müssen wir so nach von den Winkeln m und n behaupten? K. Daß sie ꝛc.

L. Nun will ich geschwind sehen, wer mir in einem zusammenhängenden Vortrage beweisen kann, daß die Winkel m und n einander gleich seyn müssen. K. (führen diesen Beweis.)

L. Gut so! Wir sind also überzeugt, daß $\angle m = \angle n$ ist. Nun will ich EF und GH wieder weglöschen und den Nebenwinkel von m mit p, und den von n mit o bezeichnen. — So! Ist wohl hierdurch mit den Winkeln m und n, eine Veränderung vorgegangen? K. Nein.

L. Wie verhalten sie sich also immer noch zu einander? K. Sie sind ꝛc.

L. Nun sagt, wie wir die Winkel m und n nennen müssen, um anzuzeigen, daß es innere Winkel sind, die auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie O P liegen, ohne Nebenwinkel zu seyn. K. Wechselwinkel.

L. Und wie verhalten sich hier die Wechselwinkel m und n zu einander? K. Sie sind einander gleich.

L. Wie viel Grade müssen m und p zusammen genommen haben? K. 180.

L. Und n und o zusammen genommen? K. Auch 180.

L. Da haben wir also zwey gleiche Größen, die eine davon ist p vereinigt mit m, und diese wollen wir A nennen. Und die andere —? K. Ist n vereinigt mit o.

L. Diese wollen wir B nennen. Wenn wir nun Gleiches von Gleichen abziehen —? K. So bleiben gleiche Reste.

L. Da ihr dieses wißt, so könnt ihr mir sagen, wie sich die Wechselwinkel o und p zu einander verhalten. K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Freylich! Denn wenn wir von den zwey gleichen Größen A und B die gleichen Größen m und n abziehen, so müssen in o und p zwey gleiche Reste bleiben. Ihr wißt also jetzt, daß hier die Wechselwinkel m und n, dann o und p einander gleich sind. Diese Wahrheit haben wir jetzt durch unser Nachforschen herausgebracht. Nun sagt mir, was ich euch beym Anfang unserer Untersuchung

 von

von den Linien AB und CD gleich bekannt machte. K. Daß sie gleichlaufend seyn.

L. Gut! Und bloß aus diesem Umstande haben wir herausgebracht — nun welche Wahrheit? K. Daß die Wechselwinkel einander gleich sind.

L. Welche Hülfslinien mußten wir ziehen, um diese Wahrheit zu finden? K. Die Hülfslinien EF und GH.

L. Welche Richtung mußten aber diese beyden Linien gegen einander haben? K. Sie mußten gleichlaufend seyn.

L. Nun will ich sehen, wer den Weg, den wir mit einander gemacht haben, allein machen, und mir den Lehrsatz beweisen kann, daß, wenn zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, die Wechselwinkel einander gleich seyn müssen. K. (versuchen der Reihe nach, diesen Beweis zu führen, der im Zusammenhange also lautet: In den beyden Dreyecken EGH und EFH ist

EG = FH) Weil sie gegenüberstehende Sei-
GH = EF) ten eines Parallelog. sind.
EH = EH

Folgl. △ EGH ≅ △ EFH.
Folgl. W. m = W. n.

Wenn EF und GH weggelöscht werden, so ist der W. m + p = 2 r. W. und n + o = 2 r. W.

Wenn man von den zwey gleichen Größen m + p und n + o die gleichen Größen m und n wegnimmt; so bleiben in o und p gleiche Reste.

Folg-

Folglich sind 1) die Wechselwinkel m und n, 2) die Wechselwinkel o und p einander gleich.)

L. Jetzt will ich euch auch zeigen, daß die Erfahrung den von uns erst erwiesenen Satz bestätigt.

Man lege hier 1) von Nro. 12. B den Kreisausschnitt t auf q von Nro. 12. A; 2) den Kreisausschnitt r von Nro. 12. A auf s von Nro. 12. B und zeige so, daß die Wechselwinkel einander gleich sind.

Vierundzwanzigster Satz.

Lehrsatz.

L., (welcher Fig. 1. verzeichnet hat.) Wenn ich euch sage, daß AB und CD gleichlaufend sind, so könnt ihr mir, wenn ihr den zuletzt erwiesenen Satz behalten habt, von einigen dieser Winkel etwas sagen. Von welchen? K. Von q und t, von s und r.

L. Was könnt ihr mir von q und t sagen? K. Daß beyde einander gleich sind.

L. Und von s und r? K. Auch daß rc.

L. Wie lautet denn der Satz, nach welchem ihr mir dieses gleich sagen konntet? K. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten geschnitten werden, so müssen die Wechselwinkel einander gleich seyn.

L. Nun wollen wir sehen, ob wir aus dieser Wahrheit nicht eine neue herleiten können. Ihr wißt also, daß der Winkel s so groß als der Win-

kel r ist. Nun forscht ein bischen nach und seht, ob nicht noch ein Winkel vorhanden ist, welcher dem Winkel r gleich seyn muß. K. Ey ja, der Winkel o.

L. Woher wißt ihr denn, daß dieser so groß als r seyn muß? K. Weil o und r Verticalwinkel und diese einander gleich sind.

L. Da ihr wißt, daß der Winkel o ebenfalls so groß als r ist, so könnt ihr mir den Augenblick sagen, wie sich o und s zu einander verhalten müssen. K. Diese müssen einander gleich seyn.

L. Ihr habt ganz richtig geschlossen, nur möchte ich den vollständigen Schluß hören, den ihr jetzt gemacht habt. K. Wenn zwey Größen einer dritten ꝛc.; o und s sind zwey Größen, welche ꝛc. folglich ꝛc.

L. Gut! Wie nannten wir denn neulich die Winkel, welche die Lage wie o und s gegen einander haben? K. Entgegenstehende Winkel.

L. Und zwar ist o ein äußerer und s ein innerer entgegenstehender Winkel. Und von diesen beyden Winkeln wissen wir nun, daß sie einander gleich sind. Sollte sich wohl auch von dem äußern Winkel p beweisen lassen, daß er gleich seyn müsse, dem ihm entgegenstehenden innern? K. O ja.

L. So beweist es mir. K. q und t sind Wechselwinkel, also einander gleich. Da nun die zwey Größen p und t einer dritten, nämlich q gleich sind, so ꝛc.

L. Das habt ihr getroffen! Und nunmehr werdet ihr mir sagen können, wie sich ein äußerer

Win-

Winkel zu dem innern entgegenstehenden verhalten muß, wenn zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden. K. Da müssen diese beyden Winkel einander gleich seyn.

L. Wollt ihr mir wohl diesen Satz ohne meine Beyhülfe beweisen? K. Ja.

Nun so thut dieses, sagt mir aber erst den Satz vor, welchen ihr beweisen wollt. K. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten geschnitten werden, so ist der äußere Winkel dem innern entgegenstehenden gleich.

L. Da wir dieses vorhin nur erst von o und s und p und t erwiesen haben, so beweist es mir jetzt von q und u, r und v. K. (beweisen.)

Man versinnliche diesen Satz durch Hülfe von Nro. 12, indem man t auf p und r auf v legt.

Fünfundzwanzigster Satz.

Lehrsatz.

L., (der die vorige Figur verzeichnet hat.) Wir wollen doch sehen, ob wir aus der Wahrheit, daß hier die Wechselwinkel gleich sind, außer der vorigen nicht noch eine andere herleiten können. Der Winkel q ist, wie ihr bereits wißt, so groß als der Winkel t. Nun sagt mir, wie viel Grade q und r zusammengenommen haben. K. 180.

L. Wie

L. Wie lautet der vollständige Schluß, den ihr jetzt gemacht habt? K. Alle Nebenwinkel haben 180 Grad; q und r sind ꝛc., folgl. ꝛc.

L. r mit q vereinigt hält also 180 Grad; aber wie viel Grade wird r mit t vereinigt halten? K. Auch 180.

L. Welcher unserer Grundsätze sagt euch denn dieses? K. Gleiches zu Gleichem addirt, giebt gleiche Summen.

L. Gut! Jetzt könnt ihr mir ja auch sagen, wie sich hier in diesem Falle, da zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, die innerrn entgegenstehenden Winkel r und t zu zwey rechten verhalten. K. Sie sind diesen gleich.

L. Sollte sich dieses wohl auch von den übrigen beyden innern entgegenstehenden Winkeln s und q beweisen lassen. K. Ja wohl.

L. So führt mir diesen Beweis. K. Da s, t, q und r zusammengenommen vier rechten Winkeln gleich, und r und t zusammengenommen so groß als zwey rechte sind, so müssen s und q zusammengenommen auch äqual zwey rechten seyn, oder: da q mit r vereinigt 180 Grad hält, so muß auch q mit s vereinigt so viel Grade halten, weil Gleiches zu Gleichem addirt ꝛc.

L. Recht! Nun sagt mir, wie ihr den Satz, den wir jetzt bewiesen haben, ausdrücken wollt. K. Wenn zwey Parallelen von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, so sind die innern entgegenste-

hen-

henden Winkel zusammengenommen so groß als zwey rechte.

Man versinnliche und bestätige auch diesen Satz vermittelst Nro. 12.

L. Nun will ich die drey zuletzt bewiesenen Sätze nebst ihren Gegensätzen, die wir neulich bewiesen haben, an die Tafel schreiben, damit ihr sie leichter übersehen und mit einander vergleichen und auch dem Gedächtnisse besser einprägen könnt.

Man schreibe nun an die Tafel:

Wenn 2 gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß	Wenn 2 Parallelen von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so sind:
1) die 2 innern entgegenstehenden Winkel = 2 r. W.	1) die 2 innern entgegenstehenden Winkel = 2 r. W.
2) die Wechselswinkel einander gleich sind und	2) die Wechselswinkel einander gleich.
3) ein äußerer Winkel so groß als der innere entgegenstehende ist; so sind diese Linien parallel.	3) ist auch ein äußerer Winkel so groß als ein innerer entgegenstehender.

L. Wenn ihr je zwey und zwey einander gegenüberstehende Sätze von diesen hier mit einander vergleicht, so werdet ihr finden, daß es Gegensätze, d. h. solche Sätze sind, wovon der eine immer das Umgekehrte des andern enthält, oder: wovon der eine als bekannt annimmt, was in dem andern erst erwiesen werden muß. In Nro. 1. linker Hand z. B. wird als bekannt angenommen, daß die zwey innern

innern 2c., und aus dieser Annahme wird bewiesen, daß zwey Linien parallel seyn müssen. In Nro. 1. rechter Hand hingegen ist der Fall gerade umgekehrt, denn da wird als bekannt angenommen, daß zwey Linien parallel sind, und hieraus wird bewiesen, daß, im Falle sie von einer dritten geschnitten werden, die zwey innern entgegenstehende Winkel = zwey r. W. seyn müssen. Gerade so ist es auch bey den übrigen dieser Sätze. Nun sagt mir noch einmahl, unter welchen Bedingungen ein Paar von einer dritten durchschnittene gerade Linien parallel seyn müssen. K. Wenn sie so geschnitten werden, daß erstlich die zwey innern 2c.

L. Jetzt sagt mir aber, wie sich gewisse Winkel theils zu zwey r. W., theils zu einander verhalten müssen, wenn zwey Parallelen von einer dritten geraden Linie geschnitten werden? K. Da müssen erstlich die zwey innern 2c. 2c.

L. Nun sagt mir noch, ob ein einmahl erwiesener Satz, wenn er, wie z. B. Nro. 1. linker Hand, umgekehrt wird, ohne Beweis angenommen werden darf. K. Nein.

L. Warum seyd ihr dieser Meynung? K Weil wir alle die rechter Hand stehenden Sätze wieder bewiesen haben.

L. Freylich! Denn könnte man bewiesene Sätze, auch wenn sie umgekehrt werden, als wahr annehmen, so hätten wir ja die drey rechter Hand stehenden Sätze nicht aufs neue zu beweisen nöthig gehabt.

Sechs = sieben = und achtundzwanzigster Satz.

Zwey Zusätze und ein Grundsatz.

L., (welcher Fig. 9. verzeichnet hat). Ich habe hier zwey gerade Linien verzeichnet, welche von einer dritten so geschnitten werden, daß die innern entgegenstehenden Winkel o und p zusammengenommen größer als zwey rechte sind. Nun sagt mir, ob die beyden Linien AB und CD gleichlaufend seyn können. K. Nein, das können sie nicht seyn.

L. Welchen Grund habt ihr zu dieser eurer Behauptung? K. Wenn sie gleichlaufend wären, so müßten ja die beyden innern entgegenstehenden Winkel zusammengenommen gleich zwey rechten seyn. Da aber dieses der Fall nicht ist, so können ja auch beyde Linien nicht gleichlaufend seyn.

L. Da habt ihr richtig geschloßen. Wie aber, wenn ich euch gesagt hätte, daß die beyden innern entgegenstehenden Winkel m und n zusammen kleiner als zwey r. W. sind, würdet ihr dann die Linien AB u. CD für gleichlaufend gehalten haben? K. Auch nicht.

L. Warum denn nicht? K. Eben weil die zwey innern entgegenstehenden W. kleiner als zwey r. W. sind. Denn sollten die Linien AB und CD gleichlaufend seyn, so könnten ja die zwey innern entgegenstehenden W. nicht kleiner, sondern müßten gerade so groß als zwey r. W. seyn.

L. Nun sagt mir, wenn oder unter welcher Bedingung man behaupten kann, daß ein Paar gerade Linien nicht gleichlaufend seyn können. K. Wenn

sie von einer dritten so geschnitten werden, daß die zwey innern entgegenstehenden Winkel zusammengenommen entweder größer oder kleiner als zwey rechte sind.

L. Sagt mir doch jetzt, was erfolgen muß, wenn ich die Linien AB und CD, von denen wir nun wissen, daß sie nicht gleichlaufend sind, genug verlängere. K. Da müssen sie endlich zusammenstoßen.

L. Das ist richtig! Aber auf welcher Seite wird dieß zusammenstoßen Statt finden, da, wo die zwey innern entgegenstehenden Winkel kleiner, oder da, wo sie größer als zwey rechte sind? K. Da wo sie kleiner sind.

L. Richtig! Wie müßtet ihr euch den ausdrücken, wenn ihr einem Andern, der aber meine vorhergehenden Fragen nicht gehört hätte, das Nämliche sagen wolltet, was ihr mir durch eure jetzige Antwort gesagt habt? K. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß zwey innere entgegenstehende Winkel zusammengenommen kleiner, als zwey rechte sind, so müssen diese Linien, wenn man sie genug verlängert, auf der Seite, wo die innern entgegenstehen Winkel weniger als 180 Grad betragen (kleiner als zwey r. W. sind) zusammenstoßen.

L. Gut! Daß die Erfahrung bestätigt, was dieser als Grundsatz angenommene Satz aussagt, seht ihr hier, wenn ich die Linien AB und CD

(Fig. 9.)

(Fig. 9.) auf der Seite, wo die Winkel m und n liegen, verlängern. — — Die zwey Linien AB und CD, werden auf der Seite, wo sie sich einander nähern und nach hinlänglicher Verlängerung zusammenstoßen würden, Convergent, da aber, wo sie sich von einander immer mehr entfernen, divergent genannt, welche Namen ich euch deßwegen bekannt mache, damit ich mich kürzer ausdrücken kann. Denn anstatt zu sagen: diese Linien würden auf dieser Seite bey hinlänglicher Verlängerung endlich zusammenstoßen, darf ich jetzt nur sprechen; diese Linien sind hier (auf die Seite wo die Puncte A und C liegen) convergent. Gesetzt, es werden zwey gerade Linien, die wie AB und CD (Fig. 9.) convergent oder divergent sind, durch eine dritte geschnitten, können da wohl die innern entgegenstehenden Winkel so groß als zwey r. W. seyn? K. Nein.

L. Aus welchem Grunde sagt ihr: nein? K. Weil, wenn die zwey innern entgegenstehenden Winkel so groß als zwey r. W. wären, die Linien parallel seyn müßten, also nicht convergent oder divergent seyn könnten.

L. Was müssen wir also von den zwey innern entgegenstehenden Winkeln, die von zwey convergenten und durch eine dritte geschnittenen Linien gebildet werden, behaupten? K. Daß sie zusammen genommen nicht 180 Grad halten (nicht so groß als zwey rechte W. seyn) können.

Will man das bisher von dem Gesagten noch mehr versinnlichen und es dadurch den Kindern desto deut-

deutlicher machen, so schraube man drey Stäbe von Nro. 5. so zusammen, daß sie Fig. 1. darstellen nnd spreche etwa folgender Massen: Hier diese Stäbe können wir uns auch als zwey gerade von einer dritten geschnittene Linien vorstellen. Wenn ich nun jeden der zwey innern entgegenstehenden Winkel r und t *) einem rechten Winkel gleich mache**), so sind die zwey innern entgegenstehenden Winkel = zwey r. W. und die Linien (Stäbe) sind, wie euch der Augenschein lehrt, wenn wir ihre Entfernung an mehrern Puncten mit dem Zirkel messen, parallel. Nun mache ich den Winkel r um 45 Grad kleiner, gebe ihm also nur 45 Grad***), dagegen mache ich aber den W. t um 45 Grad größer als er erst war, und gebe ihm also 135 Grad †). Beyde

*) Diese Buchstaben beziehen sich auf fig. 1, deren Stellvertreter jetzt die Stäbe sind.

**) Dieses kann man vermittelst eines Winkelmaßes oder eines der Dreyecke Nro. 3. thun.

***) Dieß bewerkstelligt man sehr leicht und bequem, wenn man einen der spitzigen Winkel von einem der Dreyecke Nro. 3. in den Winkel r legt, und den Stab AB so lang herabzieht, bis r diesem spitzigen Winkel, welcher 45 Grad hält, gleich ist.

†) Dieses bewirkt man, wenn man einen spitzigen Winkel von Nro. 3. a. in den Winkel v legt und den Stab CD so lang herabzieht, bis v dem hineingelegten Winkel gleich ist. Ausserdem darf man auch nur an den rechten Winkel von Nro. 3. a. einen spitzigen von b legen, so erhält man ebenfalls einen Winkel von 135 Grad, wornach man t (fig. 1.) vergrößern kann.

Beyde Winkel (r uud t) zusammen halten also wieder 180 Grad, und beyde Stäbe sind abermahls parallel.

Nun will ich jedem der beyden Wechselwinkel q und t 45 Grad geben und ihr werdet sehen, daß in diesem Falle die Stäbe (AB und CD) auch parallel sind. Endlich will ich dem äußern Winkel p 135 Grad geben, und den ihm entgegenstehenden innern t eben so groß machen, und ihr seht, daß auch in diesem Falle diese Stäbe parallel sind. — Jetzt wollen wir die Sache umkehren. Ich will AB mit CD gleichlaufend machen und damit sie immer in dieser Lage bleiben, auch diesen Stab anschrauben (Fig. 22. mit den Stäben bildend). Nun sind die Stäbe AB und CD gleichlaufend und so wohl der Winkel r, alsderW. t hält 90 Grad, wie ihr seht, wenn ich diesen rechten Winkel (Nro. 3. a) daher halte (erwähntes Dreyeck mit seinem rechten Winkel in t und r haltend). Nun verschiebe ich (EF etwa bey x mit der linken Hand haltend und GH mit der rechten auf und abschiebend) diese Stäbe, aber so, daß AB und CD immer parallel bleiben. Bey diesem Verschieben wird zwar, wie ihr seht, (GH abwärts schiebend) der Winkel r kleiner, dagegen wird t in demselben Maße größer, und jetzt (GH aufwärts schiebend) wird r größer, aber t dagegen in demselben Maße kleiner. So daß man sagen kann; unter diesen Umständen, wo nämlich die Parallelen AB und CD wie jetzt, verschoben werden, hängt der Winkel t von r, und r von t ab. D. h. wenn t zu-

nimmt, so nimmt r ab, und umgekehrt. Eben so ist es mit den Wechselwinkeln. Diese Wechselwinkel (zeigend) sind jetzt einander gleich. Vergrößere ich diesen (q) so wird, wie ihr seht, auch dieser (t) größer, und zwar gerade um so viel als q größer wird. Verkleinere ich diesen (q), wie ich jetzt thue, so wird auch dieser (t) um eben so viel kleiner als q kleiner wird. Kurz einer richtet sich ganz nach dem andern, beyde gewinnen und verlieren bey ihrer Vergrößerung oder Verkleinerung einerley Anzahl von Graden. Und wenn ihr euer Augenmerk auf einen äußern und dem ihm entgegenstehenden innern Winkel richtet, so werdet ihr finden, daß es mit ihnen dieselbe Bewandtniß habe, wie mit den Wechselwinkeln. Seht ihrs? bey dem Hin- und Herschieben dieser Stäbe werden beyde Winkel p und t in einerley Maß größer und kleiner, bleiben also immer einander gleich.

L. Nun will ich sehen, ob ihr das, was ich euch bisher von parallelen und convergenten oder divergenten Linien gesagt habe, behalten habt, und davon gehörig Anwendung machen könnt. Ich will einmahl annehmen, Carl rc. wäre ein Zimmermann, und dieses hier (man lege drey von den Stäben Nro. 5 zusammengeschraubt wie Fig. 9. zeigt vor) wären verschiedene Balken. Nun gebe ich ihm den Auftrag, diese zwey Balken (Stäbe) (AB und CD Fig. 9.) so zu stellen, daß sie parallel mit einander laufen. Dabey muß er aber bedenken, daß er als Zimmermann nur rechte Winkel vermittelst eines

Win-

Winkelmaßes accurat bilden kann. Zwar kann ein Zimmermann Balken auch unter schiefen Winkeln zusammensetzen, aber er hat kein Werkzeug, um dergleichen Winkeln eine bestimmte Anzahl Grade geben zu können, sondern bildet solche nur aufs Geradewohl. Ich gebe also hier Carln ein Winkelmaß *) und überlasse es ihm nun, meinen Auftrag zu vollziehen. K. (giebt vermittelst des Winkelmaßes jedem von zwey innern entgegenstehenden Winkeln 90 Grad.)

L. Sollten denn wohl jetzt diese zwey Stäbe (zeigend) gleichlaufend seyn? K. Ja wohl!

L. Aus welchem Grunde behauptest du dieses? K. Weil ich jedem von zwey innern entgegenstehenden Winkeln 90 Grad gegeben (gleich einem rechten gemacht) habe, und gerade Linien (also auch gerade Balken) in diesem Falle parallel seyn müssen.

L. Das ist gut! Nun soll Fritz ꝛc. ein Schreiner seyn, und mir diese 2 Stäbe an diesen dritten (3 nicht zusammengeschraubte Stäbe von Nro. 5. vorlegend) so legen, daß sie parallel mit einander laufen. Denn oft müssen Schreiner verschiedene Dinge, z. B. Leisten, die diese Lage gegen einander haben, aufleimen. K. (legt vermittelst eines Winkelmaßes oder eines rechtwinklichten Dreyecks zwey Stäbe senkrecht an einen dritten, etwa wie Fig. 8. zeigt.)

L. Warum glaubst du denn, daß jetzt diese Stäbe da (zeigend) parallel sind? K. Weil ꝛc.

*) In Ermanglung dessen nehme man eins von den Dreyecken Nro. 3.

Will man, was allerdings eine sehr nützliche Vorbereitung auf verschiedene Geschäfte des künftigen bürgerlichen Lebens ist, mehr solche Beyspiele geben, so lasse man die Kinder zeigen, wie sie als Gärtner, oder Maurer, oder Zimmerleute, oder Pflasterer ꝛc. vermittelst der Schnüre und eines Winkelmaßes Parallelen ziehen wollen, oder zeige ihnen, wie sie dieses thun müssen, und lasse sich nachher die Gründe des Verfahrens angeben.

L. Nun sagt mir eure Meynungen über folgende Behauptungen. Zwey gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, daß der eine von zwey innern entgegenstehenden Winkeln spitzig und der andere stumpf ist, sind nicht parallel. K. Diese Behauptung kann wahr und falsch seyn.

L. Wie so? K. Wenn der stumpfe und spitzige Winkel zusammen genommen mehr als 180 Grad haben, so sind die Linien freylich nicht parallel, wenn aber beyde Winkel zusammen genommen gerade 180 Grad haben, so sind die Linien parallel.

L. Wenn nun der stumpfe Winkel in diesem Falle 120 und der spitzige 65 Grad hätte, was würdet ihr dann von den durchschnittenen Linien behaupten? K. Daß sie nicht parallel seyn.

L. Da hättet ihr Recht, denn —? K. Denn die zwey innern entgegenstehenden Winkel hätten vereinigt mehr als 180 Grad.

L. Richtig! Hier diese 3 Stäbe (die wie Fig. 1. zusammengeschraubt sind und die man drehen kann, wie man will) sind jetzt so vereinigt, daß der eine von zwey innern entgegenstehenden Winkeln spitzig und

und der andere stumpf ist, und diese 2 Stäbe (zeigend) sind, wie euch schon der Augenschein lehrt, nicht parallel. Nun will ich aber diesen Stab etwas herumdrehen, daß dieser stumpfe Winkel etwas kleiner wird, und mit dem ihm entgegenstehenden spitzigen gerade 180 Grad hält, und ihr werdet, wenn ihr nach dem Augenmaße urtheilt, sagen: diese 2 Stäbe sind parallel. — Nun gebt Achtung, ich behaupte ferner: Zwey gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, daß ein Paar Wechselwinkel spitzig sind, können nicht parallel seyn. K. Auch diese Behauptung kann wahr und falsch seyn.

L. Beweist mir dieses. K. Sind beyde Wechselwinkel zwar spitzig, ist aber der eine davon nur etwas größer als der andere, so sind freylich die Linien nicht parallel; sind aber beyde Winkel spitzig und einander gleich, so müssen die Linien ꝛc.

L. Aber wenn zwey Wechselwinkel stumpf sind, dann können doch die durchschnittenen Linien nicht gleichlaufend seyn. K. Wenn diese Winkel freylich von verschiedener Größe sind, dann können die Linien nicht gleichlaufend seyn; haben aber diese Winkel eine Größe, dann ꝛc.

L. Recht!

Man versinnliche dieses wieder durch Hülfe der Stäbe (Nro. 5.) und mache 1) die stumpfen, 2) die spitzigen Wechselwinkel bald einander gleich, bald ungleich.

L. Wenn ein Paar gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß ein Paar Wechselwin-

winkel zusammengenommen 100 Grad halten, so müssen diese Linien gleichlaufend seyn. K. Dieser Satz ist wahr, wenn jeder von den zwey Wechselwinkeln gerade 50 Grad hält, hätte aber der eine etwa 60, und der andere 40 Grad dann wäre Ihre Behauptung falsch.

L. Da habt ihr wieder Recht! Hört mich nun weiter. Wenn ein Paar Parallellinien von einer dritten geschnitten werden, so kann ein äußerer Winkel spitzig, und der innere ihm entgegenstehende stumpf seyn. K. Das ist nicht möglich. Denn in Ihrem angenommenen Falle müssen diese beyden Winkel einander gleich seyn. Ein spitziger und stumpfer Winkel können aber nie einander gleich seyn.

L. Gut geantwortet! Wenn ein Paar Parallelen von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, und ein äußerer Winkel ein rechter ist, so muß der innere ihm entgegenstehende auch ein rechter seyn. K. Das ist richtig! Denn in dem angenommenen Falle müssen diese zwey Winkel einander gleich seyn. —

Nun wollen wir eimahl mit einander tauschen, ich will euch mein Geschäft übergeben und das eurige übernehmen, d. h. ihr sollt mir ähnliche Behauptungen, wie ich euch jetzt vorgelegt habe, vorlegen, und ich will sie beurtheilen *). K. (versuchen, diesen Befehl zu vollziehen).

L. Nun sollt ihr euch noch ein Paar Augenblicke üben, verschiedene Sätze, wenn ich sie euch abgefragt

*) Ohne mein Erinnern wird man einsehen, daß eine solche Uibung die Denkkraft stark anregen müsse.

fragt haben werde, vollständig auszudrücken. — Würden wohl die Linien AB und CD (Fig. 1.) gleichlaufend seyn, wenn der Winkel p nicht so groß als der Winkel t wäre? K. Nein.

L. Sagt mir das, was ihr jetzt verneinet habt, in einem vollständigen Satze. K. Die Linien AB und CD würden nicht gleichlaufend seyn, wenn der Winkel p ꝛc.

L. Würde wohl der Winkel t so groß als der Winkel q seyn, wenn die Linien AB und CD nicht gleichlaufend wären? K. Nein.

L. Sagt mir wieder in einem vollständigen Satze, was ihr jetzt verneint habt. K. Wenn die Linien AB und CD nicht gleichlaufend wären, so würde ꝛc.

L. Unter welcher Bedingung kann nur der Winkel o so groß als der Winkel s seyn? K. Unter der, daß die Linien AB und CD parallel sind.

L. Wie wollt ihr einem Andern bekannt machen, was ich euch jetzt abgefragt habe. K. Der Winkel o kann nur unter der Bedingung so groß als s seyn, daß ꝛc.

L. Was würde mit den Winkeln q und s, die jetzt = 2 rechten W. sind, für eine Veränderung vorgehen, wenn ich die Linien AB und CD aus ihrer parallelen Lage brächte? K. Dann würden diese Winkel zusammengenommen entweder kleiner oder größer als 2 rechte W. werden.

L. Faßt diese eure Antwort und den Inhalt meiner vorhergangene Frage wieder zusammen in

einen Satz und sprecht ihn aus. K. Wenn man die Linien AB und CD aus ihrer parallelen Lage brächte, so würden die Winkel q und s ꝛc.

L. Wie wolltet ihr euch denn ausdrücken, um jemanden kund zu thun, daß die Linien AB und CD (Fig. 9.) auf der Seite, wo die Winkel m und n liegen, zusammenstoßen würden, wenn man sie gehörig verlängerte? K. Die Linien ꝛc.

Neunundzwanzigster Satz.

Lehrsatz.

L., (welcher die Linien qp und AB von Fig. 3. gezogen hat.) Hier habe ich zwey Parallellinien gezogen und verbinde sie nun durch die Linie np. — So! Könnt ihr mir nun von einigen jetzt entstandenen Winkeln etwas sagen? K. Ja.

L. Von welchen? K. Von o und p.

L. Was könnt ihr mir denn von diesen Winkeln sagen? K. Daß sie einander gleich sind.

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil es Wechselwinkel und die Linien AB und qp parallel sind.

L. Gut! Nun will ich auch noch die Linie qn ziehen, wodurch wir abermahls einige Winkel, nämlich q, n und m erhalten. Sind wohl unter diesen auch einige, die einerley Größe haben müssen? K. ja.

L. Welche sind es denn? K. q und m.

L. Was führt denn wohl die Figur nqp für einen Namen? K. Dreyeck.

L. Und mit welchen Buchstaben sind die drey Winkel dieses Dreyecks bezeichnet? K. Mit q, p und n.

L. Jetzt sagt mir, wie viel die drey Winkel m, n und o zusammengenommen Grade haben? K. Da sie alle über einer geraden Linie um Einen Punct herum liegen, so müssen sie 180 Grad haben.

L. Gesetzt, ich rechne statt des Winkels m, den Winkel q, und statt o den Winkel p zu n, werden alsdann die drey Winkel n, q, p zusammengenommen mehr oder weniger als 180 Grade haben? K. Sie werden weder mehr noch weniger, sondern gerade so viel betragen.

L. Wie könnt ihr dieses wissen? K. Weil q so groß als m, und p so groß als o ist, so macht es ja keinen Unterschied aus, ob man m, n und o, oder q, n und p zusammen rechnet.

L. Das ist recht! Denn von zwey gleichen Größen kann man immer eine statt der andern nehmen. Um euch die Sache noch deutlicher zu machen, wollen wir annehmen, q habe 60 (60 an den Winkel q schreibend), p 50 (50 an den Winkel p schreibend), und n 70 (70 an n schreibend), Grad. Wie viel Grad muß nun m haben? K. Auch 60. Und wie viel Grad muß o halten? K. Auch 50.

Wenn mir also die Winkel m, n und o zusammen addiren, so addiren wir 60, 70 und 50

Grad

Grad zusammen. Welches sind aber die einzelnen Zahlen, die wir addiren müssen, wenn wir die Grade der Winkel q, n und p addiren wollen? K. Auch 60, 70 und 50.

L. Freylich! Daher werden wir auch in beyden Fällen zur Summe erhalten —? K. 180 Grad.

L. Richtig! Ihr könnt mir nun sagen, wie viel Grade die drey Winkel dieses Triangels hier zusammengenommen haben müssen? K. 180.

L. Was wir jetzt von diesem Triangel bewiesen haben, das läßt sich von jedem Triangel in der Welt beweisen, und daher können wir von den drey Winkeln eines jeden Triangels behaupten — nun was? K. Daß sie zusammengenommen 180 Grad haben.

L. Wie verhalten sie sich also zu zwey rechten Winkeln? K. Sie sind ihnen gleich.

L. Nun drückt in einem zusammenhängenden Satze aus, was ihr jetzt gelernt habt. K. In jedem Triangel sind die drey Winkel zusammengenommen so groß als zwey rechte.

L. Von diesem Lehrsatze, den ihr mir neulich nur aufs Wort glauben mußtet, weil euch die Sätze, aus denen man ihn beweisen kann, noch nicht bekannt waren, kennt ihr nun auch den Beweis. Um euch aber diesen recht geläufig zu machen, wollen wir ihn noch Ein Mahl wiederhohlen. Hier (Fig. 23.) habe ich einen Triangel ABC verzeichnet und mit der mir beliebigen Seite AB desselben die Linie ED parallel gezogen.

gen. Wißt ihr nun, was wir aus diesem Umstande, daraus nämlich, daß ED parallel mit AB ist, beweisen können? K. Ja, daß die drey Winkel ꝛc.

L. Wie lautet denn der Beweis hievon? K. Weil die Linien AB und ED gleichlaufend sind, so sind 1) die Wechselwinkel o und q, 2) die Wechselwinkel m und p einander gleich.

L. Gut! Nun können wir uns vorstellen, als lägen die drey Winkel des Triangels ABC alle um den Punct C herum, indem ja die drey Winkel m, n, o in der Größe gar nicht von den Winkeln n, q, p verschieden sind. Wer fährt jetzt im Beweise fort? K. Da nun alle Winkel, die über einer geraden Linie um einen Punct herum liegen = zwey r. Winkeln sind, so müssen die Winkel m, n, o zusammengenommen auch = zwey r. Winkeln seyn. Nun sind aber die Winkel m, n, o in der Größe gar nicht von den Winkeln n, p, q verschieden, daher müssen auch die drey Winkel n, p, q = zwey r. Winkeln seyn.

L. n, p, q aber sind die drey Winkel eines Triangels, folglich müssen wir behaupten —? K. Daß die drey Winkel eines Triangels zusammengenommen = zwey r. Winkeln sind.

L. Ich will einmahl sehen, wer unter euch diesen Beweis ohne meine Beyhülfe und gehörig wird vortragen und die Figur dazu verzeichnen können. K. (üben sich im Vortrage dieses Beweises. Beym Verzeichnen der Figur lasse man die zu ziehende Linie ED bald mit der einen, bald mit der andern

dern Seite (wie Fig. 3, 24. und 25.) des Triangels parallel ziehen.)

Man kann auch den hier erwiesenen Lehrsatz durch eine sinnliche Wahrnehmung bestätigen, wenn man von Nro. 12. C die Winkel y und z auf den Winkel A legt, wo dann die sie begrenzenden Bogen mit dem Bogen mn eine halbe Kreislinie, die das Maß zweyer rechten Winkel ist, ausmachen.

Folgerungen aus dem vorhergehenden Lehrsatze.

L. Ihr seyd nun überzeugt, daß die drey Winkel eines Triangels zusammengenommen nicht mehr und nicht weniger als 180 Grad oder zwey r. Winkel betragen können. Nun könnt ihr mir sagen, ob wohl ein Triangel möglich ist, in welchem zwey rechte und etwa ein spitziger Winkel wären. K. Ein solcher Triangel ist nicht möglich.

L. Warum seyd ihr dieser Meynung? K. Weil alle drey Winkel eines Triangels nur = 2 r. W. seyn können. Hätte nun ein Triangel zwey rechte und überdieß noch einen spitzigen Winkel, so betrügen ja seine drey Winkel zusammen mehr als 180 Grad, welcher Fall unmöglich ist.

L. Das ist gut! Wie viel rechte Winkel werden also in einem Dreyecke vorhanden seyn können? K. Nur einer.

L. Und wenn in einem Dreyecke Ein Winkel ein rechter ist, was für Winkel werden die übrigen beyden seyn müssen? K. Spitzige.

L. Kön-

L. Könnten es denn nicht etwa stumpfe seyn? K. Bewahre!

L. Warum denn nicht? K. Weil alsdann die drey Winkel weit mehr als zwey rechte betragen müßten, welcher Fall ja unmöglich ist.

L. Richtig! Aber wie viel stumpfe Winkel werden denn in einem Dreyecke vorhanden seyn können? K. Auch nur ein einziger.

L. Warum denn nicht zwey oder drey? K. Weil zwey oder drey stumpfe Winkel größer als zwey rechte sind.

L. Was für Winkel müssen also die übrigen beyden Winkel eines Dreyecks seyn, wenn der dritte desselben stumpf ist? K. Spitzige.

L. Freylich! Nun wißt ihr, daß in einem rechtwinklichten Dreyecke nur Ein rechter, und in einem stumpfwinklichten nur Ein stumpfer Winkel möglich, und ein Dreyeck mit zwey oder gar drey rechten oder mit zwey oder drey stumpfen Winkeln ein Unding ist. — — Nun habe ich hier (mit Nro. 6.) ein rechtwinklichtes Dreyeck gebildet *). Könnt ihr mir denn wohl sagen, wie viel Grade die beyden spitzigen Winkel desselben zusammengenommen haben müssen? K. Neunzig.

L. Gebt mir den Grund an, warum dieses so seyn muß. K. Weil die drey Winkel eines Triangels zusammengenommen 180 Grad haben, so müssen,

*) Man gebe durch Hülfe von Nro. 3. a. jedem der spitzigen Winkel dieses mit Nro. 6. gebildeten Dreyecks 45 Grad.

sen, wenn der eine davon 90 hat, die andern beyden zusammen auch 90 haben.

L. Gut! Gesetzt nun, der eine dieser spitzigen Winkel hätte 45 Grad, wie viel Grad müßte denn der andere haben? K. Auch 45.

L. Recht! Daß dieses in der Erfahrung zutrifft, will ich euch jetzt zeigen.

Man lege nun Nro. 3. a. mit seinem rechten Winkel in den rechten Winkel des mit Nro. 6. gebildeten Dreyecks, und dann mit einem seiner spitzigen Winkel in die übrigen beyden Winkel des nämlichen (mit Nro. 6. gebildeten) Dreyecks und zeige so den Kindern, daß der eine Winkel 90, und jeder der übrigen 45 Grad habe, wobey vorausgesetzt wird, daß man schon gesagt habe, daß jeder der spitzigen Winkel von Nro. 3. 45 Grad halte.

L. Wie aber, wenn ich diesem Winkel (auf den Winkel von 90 Grad zeigend) 100 Grad gäbe, wie viel Grade müßten dann diese beyden Winkel zusammen haben? K. Achtzig.

L. Und wie viel Grade müßte jeder einzelne haben? K. Das läßt sich nicht sagen, weil jeder bald mehr, bald weniger haben kann.

L. Recht so! Wenn ich aber dem einen 30 Grad gäbe, wie viel müßte nun der dritte haben? K. 50.

Dergleichen Beyspiele werden mehrere vorgelegt.

L. Jetzt werdet ihr mir wohl sagen können, wie sich die zwey spitzigen Winkel eines rechtwinklichten Triangels zu einem rechten Winkel verhalten. K. Sie sind ihm gleich.

L. Ist

L. Ist dieses auch der Fall bey den zwey spitzigen Winkeln eines stumpfwinklichten Triangels? K. Nein.

L. Diese sind wohl noch größer als ein rechter? K. Nein, kleiner.

L. Woher mag denn dieses wohl kommen? K. Weil der stumpfe Winkel in einem solchen Triangel schon größer als ein rechter ist, so können ja die beyden spitzigen desselben nicht auch einem rechten gleich seyn, indem sonst die drey Winkel mehr als zwey rechte betragen müßten.

L. Gut! Als ich euch vorhin sagte: dieser Winkel (zeigend) hat 100 Grad, so konntet ihr mir gleich sagen, wie viel diese beyden zusammen genommen halten. Aus einem bekannten Winkel eines Dreyecks konntet ihr also die Summe der Grade der beyden übrigen Winkel finden. Könnt ihr dieses wohl auch bey jedem andern Dreyecke thun? K. Ja.

L. Was bejahet ihr jetzt? K. Daß wir bey jedem Dreyecke aus einem bekannten Winkel die Summe der Grade der beyden übrigen Winkel finden können.

L. Wie macht ihr es denn, um diese Summe zu finden? K. Wir ziehen die Gradezahl des bekannten Winkels von 180 ab, und der Rest sagt uns alsdann, wie viel die zwey übrigen Winkel zusammen noch Grade haben.

L. Gesetzt aber, ich sagte euch von zwey Winkeln eines Dreyecks wie viel jeder derselben Grade

hat, könntet ihr wohl da sagen, wie viel der dritte Winkel haben müsse? K. Ja.

L. Wie müßt ihr es denn machen, um mir dieses sagen zu können? K. Wir addiren die Gradezahlen der beyden bekannten Winkel und ziehen die Summe von 180 ab; der Rest zeigt alsdann die Zahl der Grade des dritten Winkels an.

L. Gut! Hier habe ich einen Triangel (eine solche Figur verzeichnend) in welchem dieser Winkel (einen zeigend) 60, und dieser andre 80 Grad hat: wie viel hat nun der dritte? K. 40.

L. Hier verzeichne ich einen zweyten Triangel (diese Figur verzeichnend) in welchem dieser Winkel 60, und dieser andere 80 Grad hat: wie viel hat hier der dritte? K. Auch 40.

L. Da ist ja in diesem zweyten Triangel der dritte Winkel so groß als der dritte Winkel hier im ersten Triangel? K. Ja wohl!

L. Wenn ich also von zwey Triangeln sage, daß in dem einen zwey Winkel gerade so groß sind, als in dem andern, was könnt ihr hieraus schließen? K. Daß auch der dritte Winkel in dem einen gleich seyn müsse dem dritten Winkel im andern.

L. Dürft ihr denn nicht ferner schließen, daß diese beyden Triangel einander gleich und ähnlich seyn müssen? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil drey gleiche Winkel kein Merkmahl der Gleichheit und Aehnlichkeit zweyer Dreyecke abgeben können.

L. Recht! Das habt ihr gemerkt. — Wißt ihr denn noch, wie sich in einem gleichschenklichten

Drey-

Dreyecke die Winkel an der Grundlinie zu einander verhalten? K. Sie sind einander gleich.

L. Hier ist ein gleichschenklichtes Dreyeck. Gesetzt nun, der eine Winkel an der Grundlinie hätte 70 Grad, wie viel müßte der andere haben? K. Auch 70.

L. Aber wie viel Grade müßte der dritte, nämlich der der Grundlinie gegenüberstehende Winkel dieses Triangels haben? K. 40.

L. Hier verzeichne ich abermahls ein gleichschenklichtes Dreyeck, und gebe dem Winkel, welcher der Grundlinie gegenübersteht, 80 Grad: wie viel werden wohl die andern beyden an der Grundlinie liegenden zusammen genommen haben? K. 100.

L. Aber jeder einzelne von beyden? K. 50.

L. Jetzt habe ich euch zwey Mahl immer nur Einen Winkel eines Dreyecks bekannt gemacht, und ihr konntet mir daraus die Größe der übrigen beyden bestimmen. Wißt ihr wohl, bey welcher Art von Dreyecken dieses nur möglich ist? K. Bey den gleichschenklichten.

L. Was ist nach dieser eurer Aussage bey den gleichschenklichten Dreyecken nur möglich? K. Man kann nur bey diesen die Größe zweyer Winkel bestimmen, wenn einer gegeben ist.

L. Woher mag dieses wohl kommen? K. Daher, weil die Winkel an der Grundlinie gleich sind.

L. Freylich! Denn wird mir die Größe eines Winkels an der Grundlinie bekannt gemacht, so weiß ich auch zugleich die Größe des andern, und

 kann

kann daraus die Größe des dritten leicht bestimmen. Wird mir aber der der Grundlinie gegenüber liegende Winkel bekannt gemacht, so weiß ich, wie viel beyde an der Grundlinie liegende zusammen betragen, und da sie einerley Größe haben, so darf ich ja diesen Rest nur halbiren, um die Größe eines jeden einzelnen zu finden. — Nun sagt mir, wie sich die Winkel eines gleichseitigen Triangels zu einander verhalten? K. Sie sind alle einander gleich.

L. Wie viel Grade muß denn da jeder einzelne haben? K. 60.

L. Muß denn dieses der Fall in jedem gleichseitigen Triangel seyn, er sey groß oder klein? K. Ja wohl.

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil alle drey Winkel eines jeden Triangels zusammen 180 Grad haben, die Winkel eines gleichseitigen Triangels einander gleich sind, und der dritte Theil von 180 alle Mahl 60 ist.

L. Gut! Bey einem gleichseitigen Triangel ist also die Gradezahl eines jeden Winkels bestimmt. Immer muß ein solcher Winkel haben —? K. 60 Grad. — —

L. (welcher Fig. 23. verzeichnet und gesagt hat, daß ED parallel mit AB laufe.) Jetzt sagt mir doch, wie viel Grade der Winkel m halten müßte, wenn p deren 40 hätte. K. Auch 40.

L. Wie wollt ihr euch ausdrücken, um einem Andern das bekannt zu machen, was ich euch jetzt abge-

abgefragt habe? K. Wenn der Winkel p 40 Grad hätte, so müßte m deren auch so viel haben.

L. Wer kann diesen Satz wiederhohlen, und zugleich den Grund, warum man ihn für wahr halten muß, hinzufügen? K. Wenn der Winkel p 40 Grad — — — — weil die Linien ED und AB parallel und m und p Wechselwinkel sind.

L. Gut! Wie viel Grade müßte denn der Winkel o haben, wenn q deren 60 hätte. K. Auch 60.

L. Sagt mir dieses wieder in einem zusammenhängenden Satze und fügt zugleich den Grund, warum man ihn für wahr halten muß, bey. K. Wenn der Winkel q 60 Grad hätte, so — — — weil die Linien ED und AB ꝛc.

L. Was muß man denn thun, wenn man beweisen will, daß die drey Winkel eines Dreyecks zusammengenommen 180 Grad haben? K. Da muß man durch eine Spitze eines Triangels mit der gegenüberstehenden Seite eine Linie parallel ziehen.

L. Macht aus meiner Frage und dieser eurer Antwort wieder einen zusammenhängenden Satz. K. Wenn man beweisen will, daß ꝛc.

Auf diese Weise wird die hier angefangene Uibung im richtigen und bestimmten Gedanken-Ausdrucke noch eine Zeitlang fortgesetzt.

L. Jetzt will ich euch wieder verschiedene Sätze zur Beurtheilung vorlegen *).

 1) Wenn

*) Findet man es für gut, so kann man diese Sätze dictiren und das Urtheil darüber nebst den Gründen desselben zu Papier bringen lassen.

1) Wenn in einem Triangel zwey stumpfe Winkel enthalten sind, so muß der dritte spitzig seyn.

2) In einem rechtwinklichten Triangel betragen die zwey spitzigen Winkel desselben 104 Grad.

3) In einem stumpfwinklichten Triangel können zwey Winkel zusammen nicht 120 Grad haben. (Der stumpfe und ein spitziger Winkel zusammen können allerdiengs so viel halten, aber die beyden spitzigen nicht).

4) Je größer ein Dreyeck ist, desto mehr Grade müssen dessen Winkel zusammengenommen haben.

5) Wenn uns nur Ein Winkel eines Dreyecks bekannt ist, so können wir nie sagen, wie groß jeder der beyden übrigen Winkel sey.

6) Wenn zwey Winkel eines Dreyecks zusammengenommen weniger als 90 Grad betragen, so ist es rechtwinklicht.

Dreyßigster Satz.

Lehrsatz.

L., (welcher Fig. 4. ohne CD verzeichnet hat). Hier habe ich eine Figur verzeichnet, an der wir um etwas Neues daran zu lernen nach der zweyten unserer Regeln eine Veränderung vornehmen wollen. Worin wird demnach diese Veränderung bestehen?
K. Entweder in der Verlängerung oder Verkürzung der Seiten dieses Dreyecks.

L. Dieß

L. Dieß Mahl wollen wir eine Seite verlängern (noch CD ziehend.) — So! Jetzt haben wir schon etwas mehr bekommen, als wir vorhin hatten. Was wohl? K. Den Winkel C.

L. Recht! Ich will ihn der Bequemlichkeit wegen mit x und seinen Nebenwinkel mit y bezeichnen. Dieser Winkel x der durch die Verlängerung einer Seite eines Dreyecks entstanden ist, heißt auch ein äußerer Winkel, weil er außerhalb und nicht innerhalb eines Dreyecks, mit dem er jedoch in Verbindung steht, liegt. Diesen Winkel wollen wir nun mit den beyden innern Winkeln dieses Dreyecks, die ihm gegenüberstehen, vergleichen, um zu erfahren, wie er sich gegen sie zusammengenommen verhält. Welche Winkel haltet ihr für die dem Winkel x gegenüberstehenden innern Winkel dieses Dreyecks? K. A und B.

L. Gut! Wißt ihr denn noch wie groß die Winkel A und B und y zusammengenommen sind? K. So groß als 2 rechte.

L. Aber wie groß sind y und x zusammengenommen? K. Auch so groß als zwey rechte.

L. Wie lautet der Obersatz des Schlußes, den ihr jetzt in euren Gedanken gemacht habt? K. Alle Nebenwinkel ꝛc.

L. Nun wollen wir einmahl die drey Größen A, B und y in Gedanken in eine einzige vereinigen und sie die Größe E nennen. Das Zeichen, daß wir dieses thun wollen, soll folgendes seyn:

E
|
[A, B, y]

 (Die-

(Dieses Zeichen anschreibend). Eben so wollen wir die zwey Größen y und x in Gedanken in eine einzige vereinigen, sie die Größe F nennen, und dieses durch folgendes Zeichen bemerken:

F
|
|y, x.|

Jetzt sagt mir, wie sich die Größen E und F zu einander verhalten? K. Sie sind einander gleich.

L. Recht! Denn jede hält 180 Grad, oder: jede ist einer dritten, nämlich 2 r. W. gleich, folglich sind sie einander selbst gleich. Gesetzt nun, ich zöge von diesen zwey gleichen Größen gleiche Größen ab, wie müßten sich da die Reste zu einander verhalten? K. Sie müßten auch einander gleich seyn.

L. Welches ist denn der Rest, wenn ich von den Winkeln A, B und y den letztern, nämlich y, wegnehme? K. Die Winkel A und B.

L. Wir wollen also sagen: wenn wir von der Größe E die Größe y wegnehmen, so bleibt A und B übrig. Was bleibt denn übrig, wenn ich von y und x die Größe, d. h. hier den Winkel y wegnehme? K. Der Winkel x.

L. Daher wollen wir auch sagen: wenn wir von der Größe F die Größe y wegnehmen, so bleibt die Größe x übrig. E und F sind, wie ihr wißt, einander gleich, und y ist eine und die nämliche Größe, ich mag sie von E oder von F wegnehmen. Wenn wir also y von E und von F wegnehmen, so ziehen wir Gleiches von Gleichem ab, folglich. — ? K. Bleiben gleiche Reste.

L. Nun

L. Nun will ich von jeder der Größen E und F y wegnehmen (diesen Buchstaben in beyden Vierecken auslöschend), und ihr sagt mir welches hier in unserm Falle die gleichen Reste sind? K. A vereinigt mit B ist der eine, und x der andere.

L. Nun! Da wissen wir ja jetzt, wie sich der äußere Winkel x zu den innern beyden ihm gegenüberstehenden zusammengenommen verhält: Wie? K. Er ist ihnen gleich.

Sollten die Kinder diesen Beweis noch nicht gefaßt haben, so wiederhohle man ihn folgender Massen: Man befestige im Mittelpuncte von Nro. 8. noch ein zweytes Schnürchen und bilde nun vermittelst dieses und des ersten drey Winkel, wovon der erste linker Hand die Größe von B (fig. 4.), der zweyte nach der Rechten zu die Größe von A, und der dritte die Größe von y hat, und spreche etwa also: Hier habe ich die 3 Winkel unsers Triangels. Hier linker Hand liegt der Winkel B, da in der Mitte liegt A und hier rechts der Winkel y. Das Maß von allen dreyen zusammen ist, wie ihr seht, eine halbe Kreislinie, sie sind also = 2 r. W. Nun nehme ich y weg, diesen Winkel (auf Nro. 8.) etwa mit der Hand bedeckend, und es bleiben uns also noch die 2 Winkel B und A, welche, wie ihr seht, zusammen genommen 130 Grad*) haben. Jetzt seht hier den Winkel y wieder an. Dieser hat mit seinem Nebenwinkel x, den ich jetzt hier bilde (das rechts liegende Schnürchen zurückschlagend), auch 180 Grad, oder ist mit ihm = 2 r. W. Nehme ich nun von dieser Größe,

 die

*) Ich nehme hier nur einen bestimmten Fall willkührlich an.

die aus x und y (beyde Winkel auf Nro. 8. zeigend) besteht, y weg, so bleibt abermahls dieser andere Winkel x, der auch, wie vorhin A und B 130 Grad hat, übrig. Der Winkel x allein ist also, wie ihr hier offenbar seht, so groß als die Winkel A und B zusammen genommen.

L. Da sich das, was ich jetzt von den äußern Winkel dieses Triangels bewiesen habe, von jedem äußern Winkel eines Triangels beweisen läßt, so kann man behaupten — nun, was meynt ihr? K. Daß der äußere Winkel, welcher entsteht, wenn man eine Seite eines Dreyecks verlängert, so groß sey, als die beyden innern ihm gegenüberstehenden Winkel des Triangels zusammengenommen.

L. Daß hiemit die Erfahrung übereinstimmt, will ich euch jetzt zeigen.

Man bilde nun mit Nro. 6. einen Triangel mit einem äußern Winkel, wie fig. 4, gebe aber dem einen der innern gegenüberstehenden Winkel die Größe eines der spitzigen Winkel eines Dreyecks von Nro. 3. und dem andern die Größe des kleinsten Winkels eines Dreyecks von Nro. 13. Hierauf lege man beyde Winkel (von Nro. 3. und Nro. 13.) an einander, daß sie nur einen einzigen bilden, und halte sie in den äußern Winkel des mit Nro. 6. gebildeten Dreyecks, wo dann dieser von ihnen gerade ausgefüllt werden wird, und die Kinder also sehen können, daß er gerade so groß als die beyden gegenüberstehenden zusammen genommen ist. Ausserdem kann man den vorher erwiesenen Lehrsatz auch versinnlichen, wenn man von C Nro. 12. y und

z an einander in den äußern Winkel A legt, in welchem Falle dieser von besagten zwey kleinern Winkeln gerade ausgefüllt (gedeckt) wird.

L. Nun will ich sehen, wer die Seite eines Dreyecks verlängern, dadurch einen äußern Winkel bilden und beweisen kann, daß dieser so groß als die beyden innern ihm gegenüber stehenden ist. K. (wiederhohlen der Reihe nach den Lehrsatz und dessen Beweis, bis ihnen alles geläufig ist. — Es ist gut, wenn man sie anhält, die Sache auch eben so zu versinnlichen, wie sie vorher der Lehrer versinnlicht hat.)

L. Jetzt sagt mir doch, ob der äußere Winkel x (Fig. 4.) hier größer oder kleiner ist, als einer der innern ihm gegenüberstehenden. K. Er ist größer.

L. Freylich! Denn wir können x als das Ganze, A und B aber als seine Theile ansehen. Nach einem unserer Grundsätze ist aber das Ganze alle Mahl größer —? K. Als einer oder einige seiner Theile.

L. Nun noch einige Fragen, die derjenige, welcher den jetzt bewiesenen Lehrsatz recht gefaßt hat, wird beantworten können. Wie muß ich es machen, um auf Einmahl, ich meyne, durch eine einzige Messung zu erfahren, wie groß die Winkel B und A (Fig. 4. ohne CD verzeichnend) zusammengenommen sind? K. Da darf man nur BC verlängern und den dadurch entstehenden äußern Winkel messen.

L. Das

L. Das war gut geantwortet! Nun weiter! Wie muß ich es machen, um einen Winkel zu erhalten, der so groß ist, als die beyden Winkel A und B (Fig. 25.) zusammengenommen, ohne jedoch diese Winkel erst mit dem Transporteur zu messen oder beyde aneinander zu setzen? K. Da dürfen Sie nur aus dieser Figur (Fig. 25.) ein Dreyeck machen und einen äußern Winkel bilden, welcher den Winkeln A und B gegenüber steht.

L. Auch das war eine gute Antwort.

Wo die Schüler Transporteurs haben, da gebe man ihnen eine gewisse Anzahl Dreyecke mit dem Auftrage, durch Bildung und Messung eines äußern Winkels zu erforschen, wie viel die innern gegenüberstehenden Winkel zusammen genommen Grade haben. Ferner gebe man je 2 und 2 Winkel (wie Fig. 26. A und B) und lasse diese auf die vorhin angegebene Art in einen einzigen vereinigen. Durch Verrichtung solcher Handlungen wird der Lehrsatz unauslöschlich eingeprägt.

Einunddreyßigster Satz.

Lehrsatz.

L., (welcher Fig. 27. ohne AD verzeichnet hat.) Hier habe ich einen Triangel verzeichnet, von dem ich euch hiemit sage, daß er zwey Winkel, nämlich B und C von einerley Größe hat. Nun wollen wir sehen, ob uns dieser Umstand nicht zur Erforschung einer neuen Wahrheit dienen

kann

kann. Um aber gehörig nachforschen zu können, müssen wir erst eine unserer Regeln befolgen, um diese Figur zu verändern. Wir wollen deshalb nach der ersten derselben zwischen zwey Puncten eine gerade Linie, nämlich von dem Puncte A nach einem Puncte der Linie BC und zwar senkrecht ziehen. Fritz soll dieses thun, er soll nämlich aus der Spitze dieses Triangels auf diejenige Seite, welche zwischen den gleichen Winkeln B und C liegt, eine Linie senkrecht ziehen. K. (zieht AD.)

L. Was thut jetzt Fritz? K. Er zieht aus der Spitze des Triangels ABC ꝛc.

L. Auf wessen Befehl thut er es? K. Auf den ihrigen.

L. Carl, stelle dir vor, als träte jetzt Hr. N. N. zur Thüre herein und sage ihm, was Fritz thut, setze aber hinzu, auf wessen Befehl er es thut. K. Fritz zieht jetzt auf unsers Lehrers Befehl von der Spitze eines Dreyecks, das zwey gleiche Winkel hat, eine Linie senkrecht auf diejenige Seite, welche zwischen den gleichen Winkeln liegt.

L. Was haben wir denn jetzt durch Ziehung der Linie AD Neues bekommen, das wir vorhin noch nicht hatten? K. Zwey Dreyecke.

L. Nennt sie. K. ABD, und ADC.

L. Was habe ich euch denn schon mehrmahls gesagt, daß ihr thun sollt, sobald euch ein Paar Dreyecke vorkommen? K. Da sollen wir nachforschen und sehen, ob wir kein Merkmahl der Gleichheit und Aehnlichkeit von ihnen entdecken.

L. Die-

L. Diese Untersuchung stellt hier bey diesen Dreyecken an. K. (forschen nach dem hier Statt findenden Merkmahl der Congruenz zweyer Dreyecke. Wenn sie es, was der gewöhnliche Fall ist, nicht finden, so fahre man fort:)

L. Wie müssen sich denn wohl die Winkel m und n zu einander verhalten? K. Sie müssen einander gleich seyn, weil die Linie AD auf BC senkrecht steht und folglich m und n rechte Winkel sind.

L. Und wie verhält sich B und C. K. Beyde Winkel sind (nach unserer Annahme) auch einander gleich.

L. Da haben wir also zwey Triangel, wovon der eine zwey Winkel von der nämlichen Größe hat, wie der andere: was folgt hieraus? K. Daß auch der dritte Winkel in dem einen so groß seyn müsse, als der dritte Winkel in dem andern.

L) Welche Winkel, außer den schon angegebenen müssen also hier noch von einerley Größe seyn? K. Die Winkel o und p.

L. Welchem Triangel gehört denn die Seite AD zu? K. Sie gehört beyden zu.

L. Da hätten wir also in dem Triangel ADB die Seite AD mit den anliegerden Winkeln m und o so groß, als die Seite AD mit den anliegenden Winkeln p und u in dem Triangel ADC: was folgt hieraus? K. Daß diese beyden Triangel einander gleich und ähnlich seyn müssen.

L. Gut! Nennt mir einmahl alle gleichnamigen Seiten AB und AC ꝛc.

L. Nun

L. Nun will ich AD wieder weglöschen, so daß wir den uns Anfangs gegebnen Triangel ABC wieder bekommen. Sagt mir nun, wie sich die Seiten AB und AC in diesem Triangel zu einander verhalten. K. Sie sind einander gleich.

L. Recht! Das haben wir durch unser Nachforschen gefunden. Wißt ihr noch, was uns nur allein von diesem Dreyecke ABC bekannt war? K. Ja, daß der Winkel B gleich ist dem Winkel C.

L. Und hieraus konnten wir, nachdem wir unsere Hülfslinie gezogen hatten folgern — ? K. Daß auch die Seite AB so groß als die Seite AC seyn müsse.

L. Da haben wir also herausgebracht, daß wenn in einem Triangel zwey Winkel von einerley Größe sind, auch die beyden diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten einander gleich seyn müssen. Kann mir wohl jemand diesen Satz wiederhohlen? K. (wiederhohlen.)

L. Dieß ist wieder ein Gegensatz von einem andern, den wir vor einiger Zeit schon erwiesen haben: wer weiß noch, wie dieser lautet? K. Wenn in einem Triangel zwey Seiten von einerley Größe sind, so sind auch die diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel einander gleich. (In einem gleichschenklichten Triangel sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.)

L. Als einen Zusatz zu unserm jetzt erwiesenen Lehrsatze merkt noch, daß in einem Triangel, wo alle drey Winkel einander gleich

sind, also ein jeder 60 Grad hält, auch alle drey Seiten einander gleich seyn müssen.

Zweyunddreyßigster Satz.

Lehrsatz mit zwey Zusätzen.

L., (welcher Fig. 28 a. ohne die Diagonale AD verzeichnet hat.) Hier habe ich eine vierseitige Figur, deren gegenüberstehende Seiten parallel laufen oder mit einem Worte —? K. Ein Parallelogramm.

L. Sind in dieser Figur nicht gewisse Puncte vorhanden, die wir durch eine gerade Linie noch mit einander verbinden könnten? K. Ey ja! Die Puncte A und D, dann C und B.

L. Welche unserer Regeln können wir also hier befolgen? K. Die erste.

L. Befolgt sie und zieht von dem Punkte A zu dem Puncte D eine gerade Linie. K. (ziehen AD.)

L. So! Jetzt habt ihr eine Ecklinie, Diagonallinie oder Diagonale gezogen. So heißt nämlich jede gerade Linie, welche in einem Vier- oder Vielecke von einem Winkel zu einem gegenüberstehenden gezogen wird. Sollte wohl die Linie EF (Fig. 18. verzeichnend) auch Diagonallinie heißen können? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil sie nicht von dem einen Winkel dieses Vierecks zu dem gegenüberstehenden läuft.

L. Gut!

L. Gut! Durch Ziehung einer Diagonallinie haben wir unsere Figur verändert und dadurch wieder Veranlassung zu neuen Nachforschungen bekommen. In wie viel Theile ist denn unser Parallelogramm durch die Diagonale zerlegt worden? K. In zwey.

L. Was für Figuren sind denn diese Theile? K. Dreyecke.

L. Was werden wir nun, da uns hier wieder zwey Dreyecke vorkommen, zu thun haben? K. Wir müssen nachforschen und sehen, ob diese Dreyecke nicht einander gleich und ähnlich sind.

L. Recht! Nun gebt euch Mühe, um ein Merkmahl der Gleichheit und Aehnlichkeit zweyer Dreyecke hier aufzusuchen. K. (suchen, finden aber gewöhnlich das hier Statt findende Merkmahl der Congruenz zweyer Dreyecke nicht, daher muß man fortfahren:)

L. Ich will einmahl die Linien AC und BD weglöschen und die übrigen drey verlängern (aus Fig. 28. a. Fig. 20. ohne EF und GH machend). — Nun werdet ihr mir sagen können, was die Winkel o und p (Fig. 28.) für einen Namen führen. K. Sie heißen Wechselwinkel.

L. Und wie müssen sich diese hier zu einander verhalten? K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Sagt mir einmahl die drey Sätze des Schlusses, den ihr jetzt in Gedanken gemacht habt. K. Wenn ein Paar Parallelen von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so sind die Wech-

selwinkel einander gleich; hier sind ein Paar Parallelen, die ꝛc. folglich ꝛc.

L. Gut! der Winkel o (Fig. 28.) ist also so groß, als der Winkel p, was ich an unserer Tafel bemerken will, damit ihr es nicht vergeßt. Solltet ihr wohl nicht herausbringen können, wie sich die Winkel m und n (Fig. 28.) zu einander verhalten. K. (finden bisweilen die Antwort:) Sie sind einander gleich, weil AC und BD ebenfalls von AD geschnittene Parallellinien und m und n Wechselwinkel sind *).

L. Nun hätten wir in dem einem dieser Triangel zwey Winkel von der nämlichen Größe wie in dem andern. Wenn wir nun noch eine zwischen diesen gleichen Winkeln liegende Seite finden könnten, so hätten wir ein Merkmahl der Gleichheit und Aehnlichkeit dieser Dreyecke. K. AD gehört beyden Triangeln zu und in jedem liegen an dieser Seite die gleichen Winkel, folglich muß der Triangel ABD so groß als der Triangel ACD seyn.

L. Das ist richtig!

Sollten einige Kinder, welches immer der Fall zu seyn pflegt, durch die verschiedene Lage der Dreyecke irre gemacht werden, und den geführten Beweis noch nicht recht gefaßt haben: so nehme man zwey Dreyecke von Nro. 13. zu Hülfe, lege beyde Dreyecke an der Hypothenuse

*) Finden die Kinder diese Antwort nicht, so lasse man sie solche auf die vorhin gezeigte Art finden.

thenuse so an einander, daß sie ein Parallelogramm bilden, halte sie so vereinigt an die Tafel, wo fig. 28. a verzeichnet steht, und spreche etwa: Seht, jetzt sind die 2 Dreyecke (ABD und ACD fig. 28.) in der Lage verzeichnet, wie ich die zwey hölzernen jetzt halte, nun drehe ich aber das eine davon, welches die Lage von ABD hat, so herum, daß es in die nämliche Lage kommt, worin ACD ist. Und gerade so herumgedreht will ich jetzt auch ABD daher neben ACD verzeichnen (fig. 28. b. verzeichnend). Nunmehr wird es euch leichter werden, den vorhin geführten Beweis, wenn wir ihn jetzt noch Ein Mahl wiederhohlen, einzusehen. Der Winkel n hier in dieser Figur (fig. 28. b.) ist so groß als der Winkel m hier (fig. 28. a.), weil — nun warum? K. Weil beyde Wechselwinkel sind. U. s. w.

L. Es ist also ausgemacht, daß diese zwey Dreyecke (Fig. 28. a) einander gleich sind. Nun will ich die Diagonale A D wieder weglöschen, so daß wir unser Anfangs gegebenes Parallelogramm wieder bekommen. — So! Jetzt sagt mir, was zu thun wäre, wenn ihr dieses Parallelogramm in zwey gleiche und ähnliche Dreyecke theilen solltet. K. Da dürften wir ja nur eine Diagonallinie ziehen.

L. Und was würde durch Ziehung einer Diagonallinie hier in dieser Figur bewirkt werden? K. Dieses Parallelogramm würde dadurch in zwey gleiche und ähnliche Dreyecke getheilt werden.

L. Richtig! Da nun dieses der Fall bey jedem Parallelogramm ist, es mag die Diagonale von diesem zu diesem (A und D zeigend) oder von diesem zu diesem Winkel (C und B zeigend) gezogen werden; so können wir überhaupt von jedem Pa-

rallelogramme behaupten — nun was? K. Daß es durch eine Diagonallinie in zwey gleiche und ähnliche Dreyecke getheilt werde.

L. Und wenn jemand dieser Behauptung keinen Glauben beymessen wollte, was würdet ihr da thun? K. Sie ihm beweisen.

L. Wer führt mir denn diesen Beweis? K. (wiederhohlen den Beweis mehrmahls.)

L. Das war recht! Jetzt will ich euch auch zeigen, daß die Erfahrung mit dem jetzt bewiesenen Lehrsatze übereinstimmt. Hier (man lege Nro. 3. Nro. 11. und von Nro. 13. zwey Dreyecke so an einander, daß sie Parallelogramme bilden) habe ich drey Parallelogramme, welche alle durch eine Diagonale in zwey Dreyecke getheilt sind. Wenn wir nun die zwey aus jedem dieser Parallelogramme entstandnen Dreyecke auf einander legen, so finden wir, daß sie einander decken, also einander gleich und ähnlich sind. — —

Nun betrachtet diese Figur (Fig. 28. a.) wieder und sagt mir, wie sich denn wohl die Winkel C und B zu einander verhalten müssen. K. Diese müssen ja einander gleich seyn.

L. Und der Grund dieser eurer Behauptung ist —? K. Weil die beyden Triangel einander gleich und ähnlich und dieses gleichnamige Winkel sind.

L. Gut! Daß der Winkel o so groß als der Winkel p und der Winkel m so groß als n ist, wurde vorhin schon ausgemacht. Wenn ich nun zu den

den gleichen Größen o und p die gleichen Größen m und n addire, wie werden sich da die Summen zu einander verhalten? K. Sie müssen auch einander gleich seyn.

L. Der Winkel o, vereinigt mit dem Winkel m, ist also so groß —? K. Als der Winkel p vereinigt mit dem Winkel n.

L. Nun will ich die Diagonale wieder weglöschen, so daß wir statt der Winkel m und o den Winkel A, und statt der Winkel p und n den Winkel D bekommen. Jetzt sagt mir, wie sich immer die gegenüberstehenden Winkel in diesem Parallelogramme zu einander verhalten. K. Sie sind einander gleich.

L. Da die Eigenschaft, die wir jetzt an diesem Parallelogramme mit einander aufgefunden haben, eine wesentliche Eigenschaft dieser Figur ist, so könnt ihr mir sagen, was wir von jedem Parallelogramm in Ansehung seiner gegenüberstehenden Winkel behaupten können. Sagt mir dieß, drückt euch aber so aus, daß eure Antwort auch ohne meine Frage vollkommen verstanden werden kan. K. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Winkel einander gleich.

L. Dieß ist ein Zusatz zu unserm vorhin erwiesenen Lehrsatze. Und nun haben wir alles gefunden, was man von jedem Parallelogramm 1) in Ansehung der gegenüberstehenden Seiten, 2) in Ansehung der gegenüberstehenden Winkel, 3) in Ansehung seiner durch eine Diagonale entstehenden

Theile behaupten kann. Wer von euch aufmerksam war, wird mir wohl dieses alles auch wieder sagen können. K. In jedem Parallelogramm sind 1) die gegenüberstehenden Seiten, 2) die gegenüberstehenden Winkel einander gleich, und 3) wird jede dieser Figuren durch die Diagonale in zwey gleiche und ähnliche Dreyecke getheilt.

L. Gut! Wenn ihr noch wißt, wie groß die 3 Winkel eines Dreyecks zusammengenommen sind, und dabey recht wohl überlegt, was ihr mir jetzt im dritten Satze von einem Parallelogramme gesagt habt, so könnt ihr mir auch sagen, wie groß die 4 Winkel eines Parallelogramms zusammengenommen seyn müssen. K. Diese müssen 4 rechten Winkeln gleich seyn.

L. Wie wollt ihr mich denn von dieser Behauptung überzeugen? K. Weil die 3 Winkel eines Triangels zusammen so groß als 2 rechte sind, und ein Parallelogramm in 2 Triangel zerlegt werden kann, so müssen ja seine 4 Winkel 4 rechten gleich seyn.

L. Richtig! Sonst könnte es ja nicht, um also zu reden, an jeden Triangel zwey rechte Winkel abgeben. Ich kann euch aber auch noch auf eine andere Art beweisen, daß eure vorige Behauptung richtig seyn, und die 4 Winkel eines jeden Parallelogramms gleich 4 rechten seyn müssen. Hier (Fig. 18. ohne EF verzeichnend) ist ein Parallelogramm. Die Linien AB und CD sind folglich parallel und werden von AC, wenn diese 3 Linien verlängert werden, geschnitten. Nun könnt ihr mir

sagen,

sagen, wie man die Winkel A und C nennen kann. K. Innere entgegenstehende Winkel.

L. Und wie groß müssen diese nach einem neulich erwiesenen Lehrsatze seyn? K. Beyde zusammen müssen gleich 2 rechten Winkeln seyn.

L. Gut! Nun werdet ihr mir auch sagen können, wie groß B und D zusammengenommen seyn müssen. K. Auch so groß als 2 rechte.

L. Woher könnt ihr dieses wissen. K. Weil AB und CD parallel sind und von BD geschnitten werden, wo dann die innern entgegenstehenden Winkel BD gleich 2 rechten seyn müssen.

L. Wenn nun die Winkel A und C so groß als 2 rechte sind, und dieses der Fall auch bey den Winkeln B und D ist, so folgt —? K. Daß die 4 Winkel eines Parallelogramms äqual 4 rechten Winkeln seyn müssen.

L. Recht! — Nun wollen wir annehmen dieser Winkel hier (auf C Fig. 18. zeigend) sey ein rechter, was muß demnach dieser hier (auf den gegenüberstehenden Winkel B zeigend) für einer seyn? K. Auch ein rechter.

L. Welcher Satz sagt euch dieses? K. Dieser: in jedem Parallelogramme sind die entgegenstehenden Winkel einander gleich.

L. Gut! Welches ist denn der diesem (auf C zeigend) entgegenstehende innere Winkel? K. A.

L. Wie groß müssen denn beyde zusammengenommen seyn? K. So groß als 2 rechte.

L. Wenn nun C ein rechter ist, was muß denn da A für einer seyn? K. Auch ein rechter.

 L. Frey-

L. Freylich! Denn wäre A stumpf, so hätte ja C vereinigt mit A mehr als 180 Grad; und wäre A spitzig, so hätten C und A zusammen weniger als 180 Grad, welche beyden Fälle, wie wir neulich erwiesen haben, nicht möglich sind. So bald also C ein rechter Winkel ist, so muß A auch einer seyn. Was können wir aber von dem Winkel D behaupten, sobald wir wissen, daß A ein rechter ist? K. Daß auch D ein rechter seyn müsse.

L. Gut! Nunmehr könnt ihr mir sagen, was alle 4 Winkel eines Parallelogramms für Winkel seyn müssen, sobald einer davon ein rechter ist. K. Da müssen sie alle rechte Winkel seyn.

L. Wer getraut sich dieses zu beweisen? K. (wiederhohlen den Beweis).

L. Was müßte den aber B (Fig. 18.) für ein Winkel seyn, wenn C spitzig wäre? K. Auch ein spitziger.

L. Warum könnte er denn weder ein rechter noch ein stumpfer seyn? K. Weil er (B) so groß als C seyn muß und er diesem (C) nicht gleich seyn könnte, wenn er stumpf oder ein rechter wäre.

L. Gut! Was müßte denn aber A für ein Winkel seyn, wenn sein ihm entgegenstehender innerer Winkel C spitzig wäre? K. Da müßte A ein stumpfer seyn.

L. Welchen Grund habt ihr denn zu dieser Behauptung? K. Weil C und A zusammengenommen so groß als 2 rechte Winkel seyn müssen, so muß offen-

offenbar A um so viel größer als ein rechter seyn, als B kleiner als ein solcher ist.

L. Gut geantwortet! Wäre nun aber A stumpf, was müßte alsdann D für ein Winkel seyn? K. Auch ein stumpfer, weil die gegenüberstehenden Winkel eines Parallelogramms einander gleich seyn müssen.

L. Wißt ihr denn noch, was spitzige und stumpfe Winkel für einen gemeinschaftlichen Namen führen? K Sie heißen schiefe Winkel.

L. Wenn wir nun wissen, daß ein Winkel in einem Parallelogramme schief ist, was können wir da von den übrigen dreyen behaupten? K. Daß sie auch schief seyn müssen.

L. Und zwar müssen zwey davon spitzig, und zwey stumpf seyn. Gesetzt also, es wäre euch bekannt, daß Ein Winkel dieses (mit den Stäben Nro. 5. gebildeten) Parallelogramms hier ein rechter ist, was könntet ihr sogleich von den übrigen 3 Winkeln dieser Figur behaupten? K. Daß sie auch rechte Winkel seyn müssen.

L. (das aus den Stäben gebildete Parallelogramm verschiebend, daß es schiefwinklicht wird). Und wenn ich euch sage, daß Ein Winkel dieses Parallelogramms schief ist, was könnt ihr dann von den übrigen 3 Winkeln desselben behaupten? K. Daß sie auch schief seyn müssen.

L. In einem Parallelogramme hängen also von Einem Winkel alle Mahl die übrigen drey ab. Daß dem so sey, will ich euch jetzt mit diesem (aus den Stäben gebildeten Parallelogramme zeigen).

Seht, jetzt mache ich hier diesen Winkel durch Hülfe dieses Winkelmaßes (rechtwinklichten Dreyecks Nro. 3.) zu einem rechten Winkel und indem ich dieses thue, werden alle übrige Winkel schon von selbst auch rechte. Jetzt mache ich aber diesen Winkel (auf einen Winkel zeigend und die Stäbe verschiebend) wieder schief, und zugleich werden alle übrige Winkel auch schief. Und wenn ich auch nur die geringste Veränderung an einem dieser vier Winkel vornehme, so werden die übrigen alle zugleich mit verändert. Seht ihrs? (das Parallelogramm bald mehr, bald weniger verschiebend.) Hiebey könnt ihr auch bemerken, daß wenn diese zwey einander gegenüberstehende Winkel (zeigend) spitzig sind, die andern beyden ebenfalls gegen überstehenden stumpf sind, und daß dagegen diejenigen, die jetzt stumpf sind, spitzig werden, so bald ich die spitzigen stumpf mache.

Man zeige dieses recht durch mehrmahliges Verschieben des mit den Stäben gebildeten Parallelogramms. Dergleichen Anschauungen überzeugen die Kinder mehr, als die geführten Beweise. — Um zu erfahren, ob die Kinder das Vorhergehende recht gefaßt haben, gebe man dem einen oder dem andern derselben, das mit den Stäben gebildete Parallelogramm in die Hände und spreche etwa: die Winkel dieser Figur sind jetzt alle schief, wie du siehst. Was mußt du wohl thun, um sie alle auf Einmahl zu rechten zu machen. K. Da darf ich nur einen davon zu einem rechten machen. L. Gut! Thue dieses vermittelst dieses Winkelmaßes. K. (thut dieses.) L. Seyd ihr jetzt gewiß, daß alle übrige Winkel auch rechte sind? K. Ja. L. Aus welchem Grunde haltet ihr euch denn davon überzeugt?

K. (ge-

K. (geben ihre Gründe an.) L. Was hättet ihr denn aber wohl zu thun, wenn ich verlangte, daß dieser und dieser Winkel (zeigend) spitzig, diese beyden aber stumpf werden sollten? K. Da dürften wir nur diesen einzigen Winkel (zeigend) spitzig (stumpf) machen. L. Da, Carl, mache es so. K. (thut dieses.) L. Nun sage mir, warum du glaubst, daß dieser Winkel (auf denjenigen zeigend, welcher der innere entgegenstehende von dem ist, welchen das Kind spitzig gemacht hat) hier stumpf ist. K. (giebt seine Gründe an.)

Dreyunddreyßigster Satz.

Lehrsatz.

L., (welcher Fig. 28. a ohne AD verzeichnet hat.) Hier habe ich ein Viereck verzeichnet, in welchem die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind. Was müßten wir denn wohl von dieser Figur wissen, wenn wir sie unter die Parallelogramme sollten rechnen dürfen? K. Daß die gegenüberstehenden Seiten parallel wären.

L. Recht! Wir wollen doch einmahl sehen, ob wir nicht durch Schlüße herausbringen können, daß in dieser Figur die gegenüberstehenden Seiten wirklich parallel seyn müssen. Merkt, wir wissen jetzt weiter nichts, als daß —? K. Die gegenüberstehenden Seiten dieser Figur einander gleich sind.

L. Wir wollen nach der ersten unserer Regel verfahren und ein Paar uns gegebene Puncte durch eine gerade Linie mit einander verbinden. Was für Punc-

Puncte können das wohl seyn? K. A und D oder C und B.

L. Recht! Wir wollen AD wählen und die Diagonale ziehen. — So! Wie mögen sich wohl die beyden Dreyecke ABD und ACD zu einander verhalten? K. Sie sind einander gleich.

L. Aus welchem Grunde glaubt ihr dieses? K. Weil die Diagonallinie jedes Parallelogramm in zwey gleiche und ähnliche Dreyecke theilt.

L. Ich dachte wohl, daß ihr so antworten würdet! Aber ihr irrt euch in Ansehung des Grundes, aus welchem ihr die Gleichheit dieser Dreyecke behauptet. Denn wir wissen ja noch nicht, ob ABCD ein Parallelogramm ist oder nicht: dieses soll ja erst ausgemittelt werden. Seht also, ob ihr nicht eines der drey Merkmahle, aus welchem wir auf die Gleichheit und Aehnlichkeit zweyer Dreyecke schließen können, finden könnt. K. Ey ja! In dem einen dieser Dreyecke sind drey Seiten einzeln genommen so groß als diese Stücke im andern. Denn AB ist gleich CD, AC = BD und AD gehört beyden zu, ist also in dem einen so groß als in dem andern.

L. Das ist recht, und wir sind jetzt überzeugt, daß diese zwey Dreyecke einander gleich und ähnlich sind. Jetzt nennt mir geschwind alle gleichnamige Winkel. K. C und B, m und n, o und p.

L. Wenn wir AB, CD und AD verlängerten *), so würden die erstern zwey Linien von der drit-

*) Der mehrern Deutlichkeit wegen verlängere man diese Linien wirklich.

dritten geschnitten werden, daher sind o und p Wechselwinkel. Und wie sich diese hier zu einander verhalten, das wißt ihr. Sagt mirs noch Ein Mahl. K. Sie sind einander gleich.

L. Und was folgt hieraus? K. Daß die Linien AB und CD gleichlaufend seyn müssen.

L. Freylich. Und wenn wir AC, BD und AD verlängerten *), so würden auch die ersten beyden von der letztern geschnitten werden, weßwegen auch m und n Wechselwinkel sind, deren Gleichheit vorhin ebenfalls schon erwiesen worden ist. Ihr könnt mir daher sagen, wie die Linien AB und CD gegen einander stehen. K. Sie sind parallel.

L. Nun könnt ihr mir mit Gewißheit sagen, ob diese Figur ein Parallelogramm ist oder nicht. K. Sie ist eins.

L. Warum müssen wir sie so nennen? K. Weil ihre gegenüberstehenden Seiten parallel sind.

L. Wußten wir diesen Umstand gleich Anfangs? K. Nein.

L. Was war uns nur allein von dieser Figur bekannt? K. Daß ihre gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind.

L. Und daraus konnten wir denn Schluß ziehen, daß diese auch gleichlaufend seyn müssen. Da wir nun bey jeder vierseitigen Figur, deren gegenüberstehende Seiten einander gleich sind, den nämlichen Beweis führen können, so können wir auch von jedem Vierecke, bey dem die Gleichheit

*) Der mehrern Deutlichkeit wegen verlängere man diese Linien wirklich.

heit der gegenüberstehenden Seiten dargethan ist, behaupten, daß es ein Parallelogramm sey. Und ihr könnt jetzt eine solche Figur, ich meyne ein Parallelogramm, nach zwey Merkmahlen beschreiben, weil diese immer unzertrennlich mit einander verbunden sind. Ihr könnt nämlich sprechen: Ein Parallelogramm ist eine vierseitige Figur, deren gegenüberstehende Seiten parallel sind, oder: deren gegenüberstehende Seiten gleich lang sind. Denn aus diesem zweyten Merkmahle folgt das erste und aus dem ersten das zweyte. Nun nennt mir einmahl alle die vierseitigen Figuren, deren gegenüberstehende Seiten einanger gleich sind. K. Quadrat, Rhombus, Rechteck, Rhomboides.

L. Mit welchen gemeinschaftlichen Namen können wir jetzt alle diese Arten von Figuren belegen? K. Mit dem Namen Parallelogramm.

L. Recht! Nun gebt einmal recht Achtung und denkt gehörig über eure gelernten Sätze nach, damit ihr die Fragen, die ich jetzt thun werde, richtig beantwortet. Sind alle vier Seiten eines Parallelogramms einander gleich oder nicht. K. Es giebt Parallelogramme, wo alle vier, und wieder welche, wo nur die zwey gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind.

L. Was führt denn die erste dieser zwey Arten für einen besondern Namen? K. Quadrat.

L. Und die zweite heißt —? K. Rechteck.

L. Gut! In wie viel Abtheilungen können wir sonach die Parallelogramme bringen, wenn wir auf die Seiten sehen? K. In zwey.

L. Was für Parallelogramme kommen denn in die erste dieser Abtheilungen? K. Diejenigen, wo alle vier Seiten einander gleich sind.

L. Und in die zweyte? K. Diejenigen, wo nur die zwey gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind.

L. Die in der ersten Abtheilung können wir auch gleichseitige, und die in der zweyten ungleichzeitige Parallelogramme nennen. — Nun wollen wir, wie wir es ehemahls bey den Dreyecken machten, auch auf die Winkel Rücksicht nehmen und sehen, ob wir nicht auch in dieser Hinsicht die Parallelogramme eintheilen können. Was für Winkel hat denn ein Quadrat und ein Rechteck? K. Lauter rechte.

L. Und ein Rhombus und Rhomboides? K. Diese haben lauter schiefe Winkel.

L. Nun da können wir ja wirklich in Hinsicht der Winkel auch zwey Abtheilungen unter den Parallelogrammen machen. Sucht einmahl für jede dieser Abtheilungen einen passenden Namen. K. Rechtwinklichte und schiefwinklichte Parallelogramme.

L. Gut! Welche Figuren wollt ihr unter die rechtwinklichten rechnen? K. Die Quadrate und Rechtecke.

L. Und unter die schiefwinklichten? K. Die Rauten (Rhomben) und länglichten Rauten (Rhomboiden.)

L. Jetzt sagt mir, was ein gleichseitiges und zugleich rechtwinklichtes Parallelogramm für einen besondern Namen führt. K. Quadrat.

L. Aber

L. Aber ein ungleichseitiges und rechtwinklichtes? K. Rechteck.

L. Wie nennt man aber ein gleichseitiges und schiefwinklichtes Parallelogramm? K. Rayte (Rhombus.)

L. Und ein ungleichseitiges und schiefwinklichtes? K. Längliche Raute (Rhomboides.)

L. Nun habt ihr mir die vier Arten der Parallelogramme genannt. Denn außer den jetzt genannten giebt es keine andere Art dieser Figuren, und jedes Parallelogramm ist entweder ein Quadrat, oder ein Rechteck, oder eine Raute, oder eine länglichte Raute.

Um diese Begriffe den Kindern recht einzuüben, kann man auch die vier genannten Arten von Parallelogrammen an die Tafel verzeichnen, ein Kind um das andere an dieselbe treten und sprechen lassen: 1) Dieses hier (auf das Quadrat zeigend) ist ein gleichseitiges und recht winklichtes Parallelogramm oder ein Quadrat. 2) Weil in dieser vierseitigen Figur (auf das Quadrat zeigend) die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, so müssen sie auch gleichlaufend, und diese Figur ein Parallelogramm seyn. U. s. w.

Vierunddreyßigster Satz.

Aufgabe.

L. Hier (von Fig. 30. Tab. II. BAC verzeichnend) gebe ich euch einen Winkel und zugleich in seinen Schenkeln ein Paar gerade Linien. Nun wollen wir einmahl sehen, ob wir durch Anwendung

bung unserer Regeln nichts Neues herausbringen können. Welche unserer Regeln können wir hier befolgen? K. Die erste, indem wir von dem Puncte B bis C eine gerade Linie ziehen.

L. Was bekämen wir denn dadurch für eine Figur? K. Ein Dreyeck.

L. Das wäre aber nichts Neues für uns. Besinnt euch also und seht, ob wir nicht noch eine andere unserer Regeln hier befolgen können. K. Wenn wir die zweyte befolgen und diese Linien (AB und AC Fig. 30.) verlängern oder verkürzen, so bekommen wir ebenfalls nichts Neues, wir müssen also wohl die dritte anwenden.

L. Und was müssen wir nach dieser thun? K. Aus gegebenen Puncten mit gegebenen Halbmessern Kreise beschreiben.

L. Nennt mir einmahl die uns gegebenen Puncte, aus denen wir Kreise beschreiben, und die Linien, die wir zu Halbmessern machen können. K. Die Puncte, B, A und C, und die Linien AB u. AC.

L. Gut! Wir wollen zuerst AC zum Halbmesser nehmen und damit aus dem Puncte B den Kreis O beschreiben. — So! Nun wollen wir AB zum Halbmesser nehmen und damit aus dem Puncte C den Kreis U beschreiben. — Gut! Nun haben wir in den Durchschnittspuncten der Kreise ein Paar neue Puncte bekommen, von denen wir aber den untern ganz aus der Acht lassen wollen. Jetzt sagt, welche Regel wir anwenden können, wenn wir auf die Puncte B, C u. D unser Augenmerk richten. K. Die erste.

L. Was müssen wir denn nach dieser thun. K. Gerade Linien ziehen.

L. Welche Punkte von den drey erst genannten können wir denn durch gerade Linien mit einander verbinden. K. B und D, und C und D.

L. Recht, das wollen wir auch thun (das Parallelogramm (Fig. 30.) vollendend.) Nun haben wir ja ein Viereck bekommen, und wenn dieses ein Parallelogramm wäre, so hätten wir jetzt wirklich etwas Neues, nämlich die Auflösung der Aufgabe: Ein Parallelogramm zu verzeichnen, gelernt. Was müßte wohl dieses Viereck für Merkmahle haben, wenn wir es unter die Parallelogramme sollten setzen können? K. Seine gegenüberstehenden Seiten müßten gleichlaufend seyn.

L. Es giebt noch ein Merkmahl, woran ein Parallelogramm erkannt werden kann: was ist das für eins? K. Die Gleichheit der gegenüberstehenden Seiten.

L. Nun seht doch einmahl, ob dieses Merkmahl an unserer Figur hier nicht Statt findet. K. Ey ja, dieses findet Statt.

L. Das müßt ihr mir auch beweisen. K. Die Seite CD ist der Halbmesser des Kreises U und diesen Halbmesser haben wir AB gleich gemacht, und die Seite BD ist des Kreises O Halbmesser, welchen wir gerade so lang als AC gemacht haben *).

L. Da

*) Gewöhnlich muß diese Antwort noch durch einige Zwischenfragen herausgebracht werden.

L. Da ist es also klar, daß die gegenüberstehenden Seiten dieser Figur einander gleich sind und wir wirklich ein Parallelogramm verzeichnet haben. Könnt ihr mir denn sagen, was ich euch Anfangs für Stücke zu diesem Parallelogramme gegeben oder bekannt gemacht habe? K. Einen Winkel A und die zwey Seiten AB und AC.

L. Da haben wir also aus einem gegebenen Winkel und zwei Seiten ein Parallelogramm beschrieben. Könnt ihr wohl dieses noch Ein Mahl thun? K. Ja.

L. Was bejahet ihr jetzt? K. Daß wir aus einem gegebenen Winkel und zwey Seiten ein Parallelogramm beschreiben können.

L. Fritz soll diese Figur aus den gegebenen Stücken beschreiben, Carl soll ihm aber immer vorsagen, was er thun soll. Hier ist der Winkel mit den zwey Seiten (Fig. 30. ohne die punct. Lin. mit verändertem Winkel verzeichnend.) Fritz steht an der Tafel und beschreibt die verlangte Figur, und Carl spricht nach und nach: Nimm die Linie AC zum Halbmesser und beschreibe damit aus dem Puncte B einen Kreis. — Jetzt nimm die Linie AB zum Halbmesser und beschreibe damit aus dem Puncte C einen Kreis. — Nun ziehe aus B und C nach dem obern Durchschnittspuncte dieser Kreise gerade Linien.

L. Die Aufgabe ist richtig gelöst. Aber wer beweist mir jetzt, daß die Figur BACD ein Parallelogramm ist. K. (beweisen wie vorhin.)

L. Recht so! Nun sagt mir, ob wir uns keine

Mühe ersparen könnten, wenn wir nur ein Parallelogramm verzeichnen, die Richtigkeit unsers Verfahrens aber nicht beweisen wollten? K. Ja, wir dürften nur die Bogen bey D beschreiben, um den Durchschnittspunct zu erhalten, und alle übrige Theile der Kreislinien weglassen.

L. Richtig! Denn nur den Punct D brauchen wir. Jetzt wollen wir uns ein bischen im Verzeichnen eines ungleichseitigen Parallelogramms mit schiefen Winkeln üben. Hier (Fig. 31. Tab. II.) ist wieder ein Winkel (A) und hier sind zwey Seiten (BC und DE), aus denen ein Parallelogramm beschrieben werden soll.

Wenn der Lehrer den Winkel an der Tafel verzeichnet hat, so lasse er ihn an einer andern Stelle derselben wieder verzeichnen und dann die gegebenen Seiten BC und DE auf seine Schenkel tragen, damit die Uibung im Verzeichnen eines Winkels, der einem gegebenen gleich ist, fortgesetzt werde. Haben die Kinder Transporteurs und Maßstäbe, so gebe man mitunter das Maß der Winkel in Graden und der 2 Seiten in Zollen oder Linien, und spreche z. B. verzeichnet ein Parallelogramm aus einem Winkel von 60 ꝛc. Grad, und aus 2 Seiten, wovon die eine 2 ꝛc., die andere 4 ꝛc. Zoll hat. Endlich überlasse man die Größe des Winkels sowohl als die Länge der Seiten der Willkühr der Kinder.

L. Bisher haben wir lauter schiefwinklichte Parallelogramme beschrieben, jetzt wollen wir auch rechtwinklichte und zwar zuerst ungleichseitige beschreiben. In diesem Falle braucht man nur zwey Sei-

Seiten zu wissen, die man dann unter einem rechten Winkel zusammensetzt: übrigens verfährt man wie vorhin. Wenn ich also spreche, beschreibt mir aus den zwey Seiten BC und DE (Fig. 31.) ein rechtwinklichtes Parallelogramm, so müßt ihr BC auf einen Endpunct von DE so stellen, daß ein rechter Winkel entsteht, d. h. ihr müßt die eine dieser Linien auf einen Endpunct der andern senkrecht stellen. Um dieses zu bewerkstelligen, dürft ihr nur die Linie DE auf der Seite D verlängern, den Punct D merken und dann von diesem aus eine senkrechte Linie auf die oben (S. 283. 1stes Bdchen) angegebene Art errichten. Ist dieses geschehen, so löscht man das bey D angesetzte Stück wieder weg, und giebt der auf D errichteten senkrechten Linie die verlangte Länge *).

*) Man kann auch hier im Vorbeygehen den Kindern zeigen, wie man aus dem Endpuncte einer geraden Linie, ohne sie zu verlängern, ein Perpendikel errichtet. Man nimmt nämlich auf AB (Fig. 32.) einen beliebigen Punct, z. B. C an; über AC beschreibt man ein gleichschenklichtes Dreyeck ACD, verlängert die Seite CD auf der Seite von D und macht DE = DC, endlich zieht man die Linie EA, so hat man in ihr das Perpendikel. Der Beweis von der Richtigkeit dieses Verfahrens ist folgender. Weil ACD ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, so sind die Winkel an der Grundlinie gleich, x also so groß als z. Nun ist n ein äußerer Winkel dieses Dreyecks, folglich so groß als x und z zusammen, oder zwey Mahl so groß als x, weil z die nämliche Größe als x hat. Aus dem näm-

Nun macht es so und beschreibt aus diesen zwey Linien (man verzeichne diese Stücke nach Belieben) ein rechtwinklichtes Parallelogramm.

Uibung in diesem Geschäfte!

L. Wie verhalten sich denn alle Seiten eines gleichseitigen Parallelogrammt zu einander? K. Sie sind alle einander gleich.

L. Wenn ich also weiß, wie lang eine ist, so ist mir auch zugleich die Länge der zweyten, dritein und vierten bekannt. Nun könnt ihr mir sagen, ob man auch aus Einer gegebenen Seite und Einem Winkel ein Parallelogramm beschreiben kann. K. Das kann man freylich.

L. Nun hier Fig. 33. ist ein Winkel A und hier eine Seite BC, beschreibt mir daraus ein Parallelogramm. K. (machen einen Winkel so groß als A, und jeden seiner Schenkel so groß als BC und verfahren, wie vorhin gelehrt worden.)

L. Recht so! Wenn ich nun verlangte, daß ihr ein Quadrat beschriebet, hätte ich denn da wohl

nämlichen Grunde ist auch w doppelt so groß als y, da auch EDA ein gleichschenklichtes Dreyeck und w ein äußerer Winkel desselben ist. n + w ist also doppelt so groß als y + x. Nun aber ist n + w = 2 r. W. folglich muß y + x als die Hälfte von n + w = 1 r. W. seyn, oder 90 Grad halten, die Linie EA muß daher auf AB senkrecht stehen.

(Ein anderer Beweis von der Richtigkeit dieser Auflösung folgt weiter unten.)

wohl auch nöthig, euch einen Winkel zu geben? K. Nein.

L. Warum denn nicht. K. Weil es schon bekannt ist, daß ein Quadrat lauter rechte Winkel hat.

L. Richtig! Was dürfte ich euch, wenn ich die Größe eines zu verzeichnenden Quadrats bestimmen wollte, nur bekannt machen? K. Nur Eine Seite.

L. Warum nicht zwey? K. Weil eine Seite eines Quadrats so groß als die andere ist. Wenn wir daher Eine wissen, so wissen wir ja auch die zweyte.

L. Gut! Hier habt ihr eine Seite, verzeichnet mir daraus ein Quadrat.

Uibung im geometrischen Verzeichnen verschiedener Quadrate. — —

Nun mache man den Kindern auch die Einrichtung eines Parallellineals bekannt und zeige ihnen, wie man vermittelst dieses Werkzeugs auf eine mechanische Art Parallellinien und Parallelogramme verzeichnen könne.

L. Ehe wir weiter gehen, will ich euch erst wieder ein bischen im richtigen und bestimmten Gedankenausdrucke üben und euch dann einige Fragen zur Beantwortung und einige Sätze zur Beurtheilung vorlegen. Carl soll jetzt an dieser Tafel ein Rechteck aus zwey Seiten, wovon die eine 4 und die andere 6 Zoll lang ist beschreiben, und während

der Zeit soll Fritz auf seinem Schiefer (seinem Reißbretchen) ein Quadrat verzeichnen. — — Wißt ihr jetzt alle, was Carl und Fritz thun werden? K. Ja.

L. Was denn? K. Carl wird ꝛc.

L. Werden sie diese Handlungen nach einander oder zu gleicher Zeit verrichten? K. Zu gleicher Zeit.

L. Mit welchem Ausdrucke habe ich angezeigt, daß dieses so geschehen soll? K. Mit dem Ausdrucke: während der Zeit ꝛc.

L. Nun, Fritz und Carl, vollziehet meinen Befehl. K. (verzeichnen.)

L. Jetzt merkt auf und hört, ob ich recht erzähle, was jetzt geschehen ist. Indem Carl ein Rechteck aus zwey gegebenen Seiten, wovon die eine 4, und die andere 6 Zoll lang war, beschrieb, verzeichnete Fritz auf seinem Reißbretchen ein Quadrat. K. Das war richtig erzählt.

L. Wer kann mir denn diesen Satz nachsagen? K. (wiederhohlen.)

L. Jetzt soll Theodor einen Rhombus nach Willkühr verzeichnen und indem er dieses thut, soll August ein Quadrat beschreiben, dessen Seite 3 Zoll lang ist. K. (vollziehen den Befehl.)

L. Wer kann mir nun erzählen was jetzt geschehen ist, und seine Erzählung, wie ich vorhin that, mit indem anfangen. K. Indem Theodor einen Rhombus nach Willkühr verzeichnete, beschrieb August ein Quadrat, dessen Seite 3 Zoll lang ist.

L. Jetzt

L. Jetzt soll mir Christoph ꝛc. sagen, was man unter einer Diagonale versteht, und während der Zeit soll Heinrich in dem von Augusten beschriebenen Quadrat eine solche Linie (Diagonale) ziehen. — — Wer erzählt mir was jetzt geschehen ist, doch so, daß seine Erzählung wieder mit indem anfängt? K. Indem Christoph sagte, was man unter einer Diagonale versteht, zog Heinrich eine solche Linie in dem von Augusten ꝛc.

L. Gottfried, dir gebe ich jetzt den Auftrag, ein rechtwinklichtes und gleichseitiges Parallelogramm zu verzeichnen, und indem du dich dieses Auftrags entledigst, soll Gottlieb sagen, was die genannte Figur noch für einen besondern Namen hat. — — Hat sich wohl Gottfried des von mir erhaltenen Auftrags entledigt? K. Ja.

L. Was bejahet ihr jetzt? K. Daß sich Gottfried des von Ihnen erhaltenen Auftrags entledigt habe.

L. Was heißt das mit andern Worten? K. Er hat gethan, was Sie ihm aufgetragen haben.

L. Worin bestand denn mein Auftrag? K. Er sollte ꝛc.

L. Was geschah denn, indem sich Gottfried seines Auftrags entledigte? K. Da sagte Gottlieb, was ein rechtwinklichtes und gleichseitiges Parallelogramm noch für einen besondern Namen führt.

L. Wie wollt ihr euch ausdrücken, um einem andern kund zu thun, was jetzt Gottfried und Gottlieb gethan haben, wenn euer Satz mit indem anfangen so. K. Indem Gottfried ein rechtwinklichtes ꝛc. — —

L. Wie groß muß der durch die Verlängerung der Grundlinie eines gleichschenklichten Triangels entstehende äußere Winkel seyn, wenn der Winkel, welcher der Grundlinie gegen über steht, 75 Grad hat? K. (müssen hier bey sich selbst denken: wenn der erwähnte Winkel 75 Grad hat, so müssen die andern beyden an der Grundlinie zusammen 105, jeder aber $52\frac{1}{2}$ Grad haben. Da nun der äußere Winkel so groß ist als die beyden innern gegenüberstehenden zusammen genommen, so muß er $75 + 52\frac{1}{2}$, also $127\frac{1}{2}$ Grad haben, und sprechen:) $127\frac{1}{2}$ Grad *).

Diese Frage wird mehrmahls wiederhohlt, doch so, daß die Gradezahl eines Winkels, der hier = 75 Grad angenommen wurde, verändert wird.

L. Wie viel Grade muß der äußere Winkel eines gleichseitigen Triangels haben. K. (muß hier bey sich selbst denken: da jeder Winkel eines gleichseitigen Triangels 60 Grad hat, so muß der äußere Winkel doppelt so viel also 120 Grad haben, und sprechen:) 120 Grad.

L. Wie groß muß jeder der drey übrigen Winkel eines Parallelogramms seyn, wenn der vierte 50 Grad hat? K. (muß hier bey sich selbst denken: Wenn ein Winkel in einem Parallelogramm 50 Grad hat, so muß der gegenüberstehende auch so viel haben. Da nun beyde zusammen 100 Grad haben, so

*) Manche Kinder kommen hier auch darauf, den Nebenwinkel des äußern von 180 abzuziehen.

so müssen die übrigen gegenüberstehenden 260 Grad haben, weil alle vier zusammen 360 Grad halten. Da aber einer von diesen beyden so groß als der andere ist, so muß jeder 130 Grad haben, und spricht:) einer muß noch 50 und jeder der übrigen beyden 130 Grad haben.

Aehnliche Fragen werden mehrere gethan.

L. In einem Dreyecke, worin Ein Winkel 80 und jeder der übrigen beyden 50 Grad hat, ist die erste Seite länger als die zweyte, und die zweyte länger als die dritte. K. (muß hier bedenken, daß ein solcher Triangel zwey gleiche Winkel hat, folglich auch zwey gleiche Seiten haben müsse.)

L. Wenn in einem Parallelogramm eine Seite 8 und eine andere 10 Zoll lang ist, so halten alle 4 Seiten zusammengenommen 44 Zoll. K. (muß hier bedenken, daß in der genannten Figur die gegenüberstehenden Seiten einander gleich seyn, folglich die eine von den beyden übrigen auch 8, und die andere 10 Zoll halten müsse, welches nur eine Summe von 36 Zoll giebt.)

L. Wenn in einem rechtwinklichten Parallelogramm ein Winkel von 120 Grad vorhanden ist, so muß von der nämlichen Größe noch einer vorhanden seyn. K. (muß hier bedenken, daß in einem rechtwinklichten Parallelogramm jeder Winkel 90 Grad halten müsse.)

L. Diesen Stubenboden, welcher ein Parallelogramm ist, kann man, ohne ihn zu messen, nicht in 2 gleiche Theile theilen. K. (wird hier wohl

sagen, daß man nur eine Diagonale ziehen dürfe, wobey kein Messen nöthig ist.)

Fünfunddreyßigster Satz.

Lehrsatz.

L. Wißt ihr wohl noch, was man unter der Grundlinie einer Figur versteht? K. Ja, diejenige Seite, auf welcher man sich eine Figur stehend (aufsitzend) vorstellen will.

L., (welcher von Fig. 34. Tab. II. nur erst das Parallelogramm ABCD verzeichnet hat). Auf welcher Seite steht denn hier diese Figur? K. Auf der Seite CD.

L. Wie kann ich deßhalb diese Seite nennen? K. Grundlinie.

L. Gut! Wenn ich aber diese Figur in Gedanken so herumdrehe, wie ich jetzt dieses (mit den Stäben Nro. 5. gebildete) Parallelogramm herumdrehe, daß sie auf die Seite AC zustehen käme, so ist AC die Grundlinie dieser Figur, die ein Parallelogramm ist. Jetzt will ich hier noch ein Parallelogramm verzeichnen (BECD verzeichnend). Seht, die Figur BECD ist auch ein Parallelogramm, und damit ihr durch die andern Linien nicht irre werdet, will ich sie auf einen Augenblick weglöschen (AB, BD und CA weglöschend.) Nun sagt mir, welches die Grundlinie dieses Parallelogramms ist. K. CD.

L. Gut!

L. Gut! (die vorhin wegelöschten Linien wieder verzeichnend.) Jetzt verzeichne ich unser voriges Parallelogramm wieder, welches ebenfalls die Seite CD zur Grundlinie hat. Wie viel Parallelogramme haben wir denn jetzt hier? K. Zwey.

L. Nennt sie. K. ABCD ist das eine, und BCDE das andere.

L. Welche Seite haben denn wohl diese 2 Parallelogramme mit einander gemein? K. Die Seite CD.

L. Und wie nannten wir vorhin diese Seite? K. Grundlinie.

L. Wie müßte ich mich wohl ausdrücken, wenn ich jemanden bekannt machen wollte, was ich hier für eine Figur verzeichnet habe? K. Da müßten Sie sprechen: ich habe zwey Parallelogramme verzeichnet, welche eine gemeinschaftliche Grundlinie haben.

L. Gut! Eine gemeinschaftliche Grundlinie oder einerley Grundlinie haben also diese Parallelogramme. Nun will ich die Linien CD und AE auf beyden Seiten verlängern. — So! Könnt ihr mir wohl jetzt sagen, was die Linien FG und HI für eine Lage gegen einander haben? K. Diese müssen parallel seyn.

L. Aus welchem Grunde glaubt ihr dieses? K. Weil ABCD ein Parallelogramm ist, so müssen ja die Seiten AB und CD parallel seyn; und da Sie diese Seiten nur verlängert haben, so ꝛc.

L. Richtig! Jetzt sagt mir doch, ob das Parallelogramm ABCD zwischen den nämlichen Paral-

rallelen steht, zwischen welchen das Parallelogramm BCDE steht. K. Ja wohl.

L. Mit welchen Worten wollt ihr den von euch jetzt bemerkten Umstand einem Andern bekannt machen? K. Das Parallelogramm ABCD steht zwischen den nämlichen Parallelen, zwischen welchen das Parallelogramm BCDE steht.

L. Das ist recht! Ihr könnt aber noch kürzer also sprechen: diese zwey Parallelogramme stehen zwischen einerley Parallellinien. Jetzt wißt ihr von diesen beyden Parallelogrammen zwey Merkmahle: wer giebt mir sie an? K. Sie haben einerley Grundlinie und stehen zwischen einerley Parallelen.

L. Gut! Nun wollen wir sehen, ob wir nicht erforschen können, wie sich Parallelogramme, die diese zwey Merkmahle haben, zu einander verhalten. Die Linie CB ist zwar eine Seite von dem Parallelogramm BCDE, wir können ihr aber auch noch einen andern Namen geben, wenn wir bedenken, daß sie in dem Parallelogramm ABCD von dem Winkel C nach dem Winkel B gezogen ist. Welchen Namen wohl? K. Diagonale.

L. Recht! Was wird den bewirkt, wenn ich in einem Parallelogramm eine Diagonale ziehe? K. Das Parallelogramm wird dadurch in zwey gleiche und ähnliche Dreyecke getheilt.

L. Diese zwey Dreyecke will ich jetzt der Kürze wegen mit Ziffern bezeichnen (1 und 2 hinschreibend). Das Dreyeck Nro. 1. ist also so groß — ? K. Als das Dreyeck Nro. 2.

L. Gut!

L. Gut! Nun sagt mir geschwind, ob in dem Parallelogramme BCDE nicht auch eine Diagonale vorhanden ist. K. Ey ja, die Linie BD ist eine.

L. Da muß also auch dieses Parallelogramm in zwey gleiche und ähnliche Dreyecke zertheilt seyn. Nennt mir diese. K. BCD und BDE.

L. Ich will das Letztere mit der Ziffer 3 bezeichnen. Wie verhalten sich also die Dreyecke Nro. 2 und 3 zu einandor? K. Sie sind einander gleich.

L. Forscht jetzt nach und seht, ob hier nicht zwey Größen angetroffen werden, die einer dritten gleich sind. K. Ey ja, jedes von den Dreyecken Nro. 1 und 3 ist so groß als Nro. 2.

Und daraus folgt —? K. Daß diese zwey Dreyecke selbst einander gleich sind.

L. Wenn wir das Dreyeck Nro. 2. in der Lage wie es hier ist, mit Nro. 1. vereinigt oder uns die Linie CB wegdenken, so erhalten wir das Parallelogramm, ABCD. Und wenn wir das nämliche Dreyeck Nro. 2. mit Nro. 3. vereinigt oder uns die Linie BD wegdenken, so erhalten wir —? K. Ebenfalls ein Parallelogramm, nämlich BCDE.

L. Wer kann mir nun sagen, wie sich diese zwey erstgenannten Parallelogramme zu einander verhalten müssen? K. Diese müssen einander gleich seyn.

L. Nach welchem unserer Grundsätze könnt ihr dieses behaupten? K. Nach dem: Gleiches zu Gleichem addirt, giebt gleiche Summen.

L. Wel-

L. Welches sind denn hier die gleichen Grössen, zu denen wir andere Grössen addiren können? K. Die Dreyecke Nro. 1. und 3.

L. Und welche Grösse muß hier zu jedem dieser beyden Dreyecke addirt werden? K. Das Dreyeck Nro. 2.

L. Und diese Grösse bleibt sich gleich, wir mögen sie in Gedanken mit Nro. 1. oder mit Nro. 3. vereinigen, daher können wir allerdings sagen: wir addiren Gleiches zu Gleichem. Ihr könnt euch auch die Sache so vorstellen: das Dreyeck Nro. 1. ist die Hälfte von dem Parallelogramm A B C D, und das Dreyeck B D E ist die Hälfte von dem Parallelogramm B C D E. Und von diesen beyden Hälften zweyer verschiedner Grössen wissen wir, daß sie einander gleich sind. Da sich nun verschiedene Grössen gerade so zu einander verhalten müssen, wie sich ihre Hälften zu einander verhalten, oder: da die Ganzen gleich seyn müssen, wenn ihre Hälften einander gleich sind: so können wir hier schliessen — ? K. Daß die beyden Parallelogramme A B C D und B C D E einerley Grösse haben müssen.

L. Richtig! Aber sind denn wohl diese zwey Parallelogramme einander ähnlich oder haben sie einerley Gestalt? K. Nein.

L. Aus welchem Grunde sprecht ihr: nein? K. Weil ja das eine rechte und das andere schiefe Winkel hat.

L. Ihr beurtheilt dieses hier freylich nur nach dem Augenmaße, welches oft trüglich ist. Indessen habt

habt ihr dieß Mahl Recht, und wir haben, was ihr wohl merken müßt, hier nur die Gleichheit, aber ja nicht die Aehnlichkeit, zweyer Parallelogramme bewiesen. Diesen Beweis hätten wir aber nicht führen können, wenn diese zwey Parallelogramme nicht die zwey vorhin bemerkten Merkmahle hätten. Ihr könnt mir also sagen, wenn oder unter welcher Bedingung man von zwey Parallelogrammen behaupten könne, daß sie einander gleich seyn, oder einen gleich großen Flächenraum einnehmen müssen. K. Wenn sie einerley Grundlinie haben und zwischen einerley Parallelen stehen.

L. Gut! Nun sagt mir doch, wie ihr euch ausdrücken müßtet, wenn ihr den ganzen Lehrsatz, den ihr jetzt gelernt habt, einem Andern bekannt machen wolltet. K. Wenn zwey Parallelogramme einerley Grundlinie haben und zwischen einerley Parallelen stehen; so sind sie einander gleich *).

L. Nun will ich euch den Beweis für die Wahrheit dieses Satzes noch Ein Mahl mit Hülfe dieser Drey-

*) Dieser Lehrsatz ist zwar durch den beygebrachten Beweis noch nicht in seiner Allgemeinheit, sondern nur bloß für den Fall bewiesen, wo eine Seite des einen Parallelogramms zugleich die Diagonale des andern ist. Da er aber doch in seiner Allgemeinheit erwiesen werden kann, und ich den Raum ersparen wollte, so glaubte ich, ihn auch ohne die Beweise für die übrigen beyden Fälle gleich allgemein ausdrücken lassen zu dürfen.

Dreyecke zu erläutern und recht deutlich zu machen suchen, dann will ich sehen, wer ihn wiederhohlen kann. Diese drey hölzernen Dreyecke *), die ich eben so, wie die jetzt an unserer Tafel verzeichneten mit 1, 2 und 3 bezeichnet habe, bilden, wenn ich sie so, wie ich jetzt thue, auf den Tisch herlege (die Dreyecke so an einander legend, wie Fig. 34. zeigt) gerade die Figur, die wir hier an der Tafel verzeichnet haben. Denn wenn wir uns diese zwey Dreyecke (auf Nro. 1. und 2. zeigend) vereinigt denken, so haben wir ein rechtwinklichtes, und wenn wir uns diese zwey (auf Nro. 2. und 3. zeigend) vereinigt denken, ein schiefwinklichtes Parallelogramm, welche beyde Figuren hier diese (zeigend) Grundlinie, die wir eben so wie hier an der Tafel CD nennen wollen, gemein haben und zwischen einerley Parallelen stehen **). Nun sagt mir, wie sich diese zwey Dreyecke (auf Nro. 1. und 2. zeigend) zu einander verhalten müssen, da sie zusammen ein Parallelogramm bilden, das nach der Dagonallinie zerschnitten ist? K. Diese müssen einander gleich seyn.

L. Aus welchem Grunde könnt ihr dieses behaupten? K. Weil eine Diagonallinie ꝛc.

L. Rich-

*) Ich lege hier drey Dreyecke von Nro. 13. oder Nro. 14. vor, und lasse sie ganz die Stelle der an der Tafel verzeichneten 34sten Figur vertreten, daher sie eben so, wie die Dreyecke dieser Figur, an einander gelegt werden.

**) Man kann die Parallelen mit Kreide auf den Tisch ziehen und sagen, daß dieß die verlängerten Seiten AE und CD vorstellen sollen.

L. Richtig! Daß diese zwey Dreyecke auch wirklich einander gleich sind, sehen wir, wenn ich sie so auf einander lege (beyde Dreyecke vor den Augen der Kinder so auf einander legend, daß ihre Grenzen auf einander fallen), denn da finden wir, daß sie einander decken. — (Die Dreyecke werden in ihre vorige Lage gelegt.) Nun sagt mir, wie sich diese zwey Dreyecke (auf Nro. 2. und 3. zeigend) zu einander verhalten müssen. K. Auch diese müssen einander gleich seyn.

L. Aus welchem Grunde könnt ihr denn dieses behaupten? K. Weil ꝛc.

L. Darum decken auch, wie ihr hier seht (dieß wie vorhin zeigend), diese zwey Dreyecke einander. Nun haben wir hier (die Dreyecke wieder in die Lage, die Fig. 34. zeigt, bringend) zwey Größen, welche einer dritten gleich sind. Welches sind diese zwey Größen? K. Hier das Dreyeck Nro. 1. u. 3.

L. Und welches ist die dritte Größe, welcher diese zwey gleich sind? K. Hier das Dreyeck Nro. 2.

L. Nun wißt ihr ja auch, wie sich das Dreyeck Nro. 1. zu dem Dreyecke Nro. 3. verhalten muß. Sagt mir dieses. K. Jenes muß diesem gleich seyn.

L. So ist es auch wirklich, denn auch diese beyden Dreyecke (Nro. 1. und 3.) decken (beyde Dreyecke gehörig auf einander legend), wie ihr hier seht, einander. Dieses Dreyeck (Nro. 1.) ist also mit diesem hier (Nro. 3.) von einerley Größe. Nun addire ich Nro. 2. zu Nro. 1. (beyde Dreyecke, die nebst dem dritten die Lage von

Fig. 34. haben, etwas gegen die Linke zu schiebend) und bekomme dadurch, wie ihr seht, dieses Parallelogramm, das wir A nennen wollen. Jetzt nehme ich aber die nämliche Größe, nämlich das Dreyeck Nro. 2. und addire es zu Nro. 3. (Nro. 2. etwas gegen die Rechte her an Nro. 3. schiebend), wodurch wir ebenfalls ein Parallelogramm bekommen, welches wir B nennen wollen. Ich habe also jetzt Gleiches zu Gleichem addirt, wodurch wir erhalten mußten —? K. Gleiche Summen.

L. Wie muß sich also das Parallelogramm A (dieses ein bischen von dem Dreyecke Nro. 3. wegrückend) zu dem Parallelogramme B (Nro. 2. herüber an Nro. 3. rückend) hier verhalten? K. A muß so groß als B seyn.

L. Allerdings. Ihr seht dieß auch, wenn ich das Dreyeck Nro. 1. wegrücke und Nro. 3. dafür gerade so herüber lege, wie Nro. 1. lag, wo dann aus dem schiefwinklichten Parallelogramme B ein rechtwinklichtes wird, welches gerade die Größe von A hat. Wer getraut sich nun, mir erstlich durch Hülfe unserer Figur an der Tafel, und dann vermittelst dieser Dreyecke zu zeigen, daß der Lehrsatz: wenn zwey Parallelogramme ꝛc. wahr ist? K. (wiederhohlen den Beweis.)

L. Jetzt seht unsere Figur an der schwarzen Tafel wieder an (Fig. 34.), und nennt mir die

Sei-

Seiten des schiefwinklichten Parallelogramms. K. CB, BE, ED und DC.

L. Welche von diesen Seiten führt wohl noch einen besondern Namen? K. Die Seite CB.

Welchen Namen führt denn diese Seite noch? K. Den Namen Diagonale.

L. Von welchem Parallelogramm ist sie denn die Diognale? K. Von dem Parallelogramm ACBD.

L. Ist in dieser Figur nicht noch eine Linie vorhanden, welche sowohl eine Diagonale als auch eine Seite von einem Parallelogramm ist? K. Ja, die Linie BD.

L. Was behauptet ihr jetzt von der Linie BD? K. Daß sie sowohl eine Diagonale, als auch ꝛc.

L. Von welchem Parallelogramm ist denn diese Linie die Diagonale, und von welchem eine Seite? K. Von dem Parallelogramme BCDE ist sie die Diagonale, und ꝛc.

L. Wie müßtet ihr euch ausdrücken, wenn ihr einem Andern bekannt machen wolltet, was wir jetzt von der Linie BD behauptet haben? K. Die Linie BD ist sowohl eine Seite von dem Parallelogramm ABCD als auch eine Diagonale von dem Parallelogramme BECD.

L. Nun gebt Achtung und seht, ob der folgende Satz richtig ist: die zwey hier an der Tafel verzeichneten Parallelogramme haben eine solche Stellung, daß eine Seite des einen zugleich die Diagonale des andern ist. K. Dieser Satz ist richtig.

L. So wollen wir ihn ein paar Mahl wiederhohlen. Wer sagt ihn zuerst ganz fehlerfrey nach? K. Die zwey hier an der Tafel ꝛc.

L. (welcher Fig. 35. verzeichnet hat.) Hier habe ich wieder ein Paar Parallelogramme verzeichnet, welche mit diesen hier (auf Fig. 34. zeigend) einige Merkmahle gemein haben. Könnt ihr mir diese wohl angeben? K. Sie haben beyde einerley Grundlinie und stehen zwischen einerley Parallelen.

Woher wißt ihr denn, daß die Linien GN und IO parallel sind. K. Weil es die gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogramms aber verlängert sind.

L. Gut! Jetzt sagt mir doch, welche Linie hier in dieser Figur (Fig. 35. Tab. II.) eine Seite eines Parallelogramms und zugleich eine Diagonale ist. K. Hier ist gar keine Linie, welche eine Seite eines Parallelogramms und zugleich eine Diagonale wäre.

L. Da habt ihr ganz richtig bemerkt, und ihr könnt mir also sagen, ob diese zwey Parallelogramme (auf Fig. 35. zeigend) die nämliche Stellung gegen einander haben, welche diese hier (Fig. 34.) gegen einander haben. K. Nein, sie haben nicht diese Stellung gegen einander.

L. Um die Stellung dieser zwey Parallelogramme gegen einander anzuzeigen, muß man sprechen: sie haben einerley Grundlinie, stehen zwischen einerley Parallelen, aber so, daß eine Seite des einen, eine Seite des andern schneidet.

Die

Die Stellung, die diese zwey Parallelogramme gegen einander haben, will ich euch noch durch Hülfe dieses (aus den Stäben Nro. 5. gebildeten) Parallelogramms recht deutlich machen.

Man zeichne hier ein Parallelogramm so groß als das aus den Stäben gebildete an die Tafel und halte dann dieses letztere so an das erstere, wie Fig. 35. zeigt. Noch besser kann man die Stellung der erwähnten Parallelogramme versinnlichen, wenn man sieben von den Dreyecken Nro. 14. so legt, wie Fig. 1. Tab. VI. zeigt.

Nun sagt mir geschwind wieder, unter welcher Bedingung ein Paar Parallelogramme einander gleich seyn müssen. Wenn sie einerley Grundlinien rc.

L. Sollten denn wohl auch diese zwey Parallelogramme (Fig. 35.) einander gleich seyn? K. Ja wohl.

L. Aus welchem Grunde könnt ihr dieses behaupten? K. Weil sie einerley Grundlinie rc.

L. Gut! Nur merkt, daß in dem Falle, wo zwey Parallelogramme diese Stellung (Fig. 35.) haben, ein besonderer Beweis für ihre Gleichheit nöthig ist, welchen ich aber hier der Kürze wegen übergehe*). Mit diesen Dreyecken hier, (die sich in

*) Für denjenigen, der diesen Beweis gleich bey der Hand haben mögte, setze ich ihn hieher.

GH = IK } weil es die gegenüberstehenden Sei-
LM = IK } ten eines Par. sind.

folgl. GH = LM.
HL = HL

folgl.

in der Lage befinden, wie Fig. 1. Tab. VI. zeigt) will ich euch aber zeigen, daß aus dem schiefwink-lich-

folgl. GH+HL = ML + HL.

Also die Seite GL im △GLI = der Seite HM im △HMK

Da nun ferner

GI im △GLI = HK im △HMK
und LI im △GLI = KM im △HMK } weil es die gegenüberstehenden Seit. eines Par. sind.

so ist der △GLI ≅ △HMK.

Nimmt man nun Gleiches von Gleichem, nämlich von beyden Dreyecken v weg, so bleiben gleiche Reste in den zwey Vierecken y und x. Und wenn man zu jeder dieser Größe z addirt, so giebt es zwey Parallelogramme von gleicher Größe.

Versinnlichen kann man diesen Beweis folgender Massen: Man setze sieben von den Dreyecken Nro. 14. so zusammen, wie fig. 1. Tab. VI. zeigt und spreche etwa: Hier sind ebenfalls zwey Parallelogramme, welche einerley Grundlinie haben und zwischen einerley Parallelen (diese bemerke man mit Kreide) stehen, und die wir jetzt eben so mit einander vergleichen wollen, wie wir vorhin diese hier (fig. 35) an der Tafel verglichen haben. Die Seite AB (man bezeichne die Seiten der hölzernen Dreyecken, wie sie Tab. VI. fig. 1. bezeichnet sind) ist äqual der Seite DE, weil diese zwey Größen einer dritten, nämlich FG gleich sind. Das Dreyeck hier (auf a zeigend), welches beyde Parallelogramme gemein haben, wollen wir vor der Hand etwas bey Seite schieben und dagegen den beyden alsdann übrigbleibenden Vierecken ein anderes Dreyeck zusetzen. (Hier rücke man das Dreyeck a von den übrigen etwas weg

lichten Parallelogramme (DEFG) eines gebildet werden kann, welches diesem rechtwinklichten hier (ABFG) ganz gleich ist. (Man schiebe jetzt die

weg und schiebe dagegen das Dreyeck g in den leeren Raum m, so daß aus fig. 1. Tab. VI. fig. 2. entsteht.) Hierdurch bekommen wir zwey Dreyecke, die wir leicht mit einander vergleichen können. Das hinzugefügte Dreyeck (g) bildet nämlich 1) mit diesem Viereck hier (zeigend) das größere Dreyeck ACF (hier rücke man das Dreyeck g von fig. 3. wieder herüber an das Dreyeck f, damit das Dreyeck BGE fig. 2. abgesondert vor Augen liege). Das Dreyeck ACF (hier wird g fig. 3. an c gerückt) hat 3 Seiten, welche einzeln genommen gerade so groß sind, als die drey Seiten des Dreyecks BGE, das da liegt (das Dreyeck g herüber an f rückend) *). Es müssen daher diese zwey Dreyecke einander gleich und ähnlich seyn. Wenn ich nun das hinzugefügte Dreyeck wieder wegnehme (das mit g bezeichnete Dreyeck wieder bey Seite legend), so ziehe ich Gleiches von Gleichem ab, folglich müssen gleiche Reste bleiben. Diese Reste sind nun diese zwey Vierecke (man zeige auf das Viereck, welches durch b, c, d und auf das, welches durch e, f, g gebildet wird). Nun setze ich den vorhin weggenommenen Triangel (a) wieder hinzu (man bilde hier wieder fig. 1.) und addire auf diese Weise sowohl zu dem einem als auch zu dem andern dieser gleichen Vierecke einerley Größe, wodurch wir gleiche Summen bekommen. Es muß also das Parallelogramm ABFG gerade so groß seyn als das Parallelogramm DEFG. — —

*) Man zeige hier, warum man behaupten müsse, daß die drey Seiten des einen dieser Dreyecke so groß seyen, als die drey Seiten des andern.

Dreyecke b, c, d bey Seite, und lege an ihre Stelle die mit e, f und h bezeichneten, gebe ihnen aber gerade die Lage, die die erstern hatten, so entsteht abermahls das Parallelogramm ABFG.) — Nun seht diese Figur hier (Fig. 36.) an, und sagt mir, ob wohl auch hier zwey Parallelogramme vorhanden zu seyn scheinen. K. Ja, es scheint allerdings so.

L. Nennt mir einmahl die Figuren einzeln, die euch Parallelogramme zu seyn scheinen. K. NXOP scheint das eine, und QROP das andere zu seyn.

L. Der Schein trügt euch dieß Mahl nicht, es sind dieß wirklich zwey Parallelogramme. Ob sie einander gleich seyn müssen oder nicht, das könnt ihr mir vielleicht sagen. K. Sie müssen auch einander gleich seyn.

L. Woher wißt ihr dieses? K. Daher, weil sie einerley Grundlinie haben und zwischen einerley Parallelen stehen.

L. Das ist richtig! Haben sie den wohl auch die Stellung gegen einander, die dieses oder dieses Paar (Fig. 34. und 35.) hat? K. Nein.

L. Seyd ihr wohl im Stande, mir zu sagen, wie sie gegen einander stehen? K. Sie stehen so, daß eine Seite des einen zwischen zwey Seiten des andern liegt *).

L. Richtig! Auch in dem Falle, wo zwey Parallelogramme die jetzt angegebene Stellung und übrigens einerley Grundlinie haben und zwischen einer-

*) Diese Antwort erfolgt nur bisweilen von den bessern Köpfen.

einerley Parallelen stehen, ist für ihre Gleichheit ein besonderer Beweis nöthig, den ich ebenfalls der Kürze wegen übergehe *). Aber die Stellung, die diese

*) Für den, der diesen Beweis allenfalls durch Hülfe eines Trapezes und zweyer Dreyecke von Nro. 13. führen möchte, setze ich ihn hieher, in der Voraussetzung, daß er die erst genannten Theile so bezeichne, wie sie Fig. 36. Tab. II. bezeichnet sind. Wenn wir dieses Dreyeck (a) mit diesem Trapez (b) vereinigen (beyde Stücke ein wenig von c ab, gegen die Linke zu, rückend), so haben wir das Parallelogramm NXOP, und vereinigen wir das Trapez b mit dem Dreyecke c (b herüber an c rückend), so bekommen wir das Parallelogramm QROP. Diese beyden (mit 3 Stücken von Nro. 13. gebildeten) Parallelogramme haben einerley Grundlinie und stehen zwischen einerley Parallelen. Gerade wie diese Figur hier (fig. 36.) Da sie ein Trapez mit einander gemein haben, so darf nur die Gleichheit der Dreyecke a und c erwiesen werden, um darthun zu können, daß beyde Parallelogramme gleichen Flächenraum einnehmen müssen. Nun ist aber NQ + QX (a und b etwas von c gegen die Linke zurückend) = OP, und QX + XR (b wieder an c rückend) auch = OP, folglich NQ + QX oder NX = QX + XR oder QR, weil, wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, diese selbst ꝛc. Da nun hier (in der mit 3 Stücken von Nro. 13. gebildeten Figur) jede der Seiten NQ, QX, XR einen Zoll lang ist; so ist natürlich NQ + QX eben so gut 2 Zoll lang, als QX + XR. Nimmt man nun von den beyden Größen NX und QR die gemeinschaftliche Größe QX weg (das Trapez b wegnehmend), so müssen in NQ und

diese zwey Figuren gegen einander haben, will ich euch durch Hülfe dieses (mit den Stäben Nro. 5. gebildeten) Parallelogramms recht deutlich machen. Seht, jetzt steht dieses (hölzerne) Parallelogramm gerade wir QROP (Fig. 36.) gegen NXOP. Denn dieser Stab (zeigend) liegt zwischen den Seiten NO und XP, hingegen XP liegt an diesen zwey Stäben.

Wenn man von Nro. 13. ein Trapez und 2 Dreyecke zu Hülfe nimmt, und diese 3 Stücke so an einander legt, wie fig. 36. zeigt, so kann man die Lage der beyden Parallelogramme ebenfalls gut versinnlichen.

Nun will ich sehen, wer mir recht ordentlich sagen oder gleichsam hier von diesen Figuren (Fig.

und XR gleiche Reste übrig bleiben. Also muß hier in unserm bestimmten Falle sowohl in NQ als in XR eine Linie von 1 Zoll Länge übrig bleiben.

Nun ist ferner

NO in dem ▷ a = XP in dem ▷ c
und QO in dem ▷ a = RP in dem ▷ c

weil sie die gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogramms sind.

Da nun in jedem der Dreyecke a und c drey Seiten einzeln genommen, so groß sind ꝛc. so sind beyde Dreyecke einander gleich und ähnlich. Wenn man daher das Trapez b 1) zu a (b an a legend), 2) zu c (b an c rückend) addirt, so müssen gleiche Summen herauskommen und die 2 Parallelogramme NXOP und QORP müssen einander gleich seyn. Daher kann man auch das eine dieser Parallelogramme in das andere verwandeln, je nachdem man das Dreyeck a links oder rechts gehörig an das Trapez b legt.

(Fig, 34. 35. 36.) ablesen kann, welche Stellung diese zwey (auf Fig. 34. zeigend), dann diese (Fig. 35.) und endlich diese zwey (Fig. 36.) Parallelogramm gegen einander haben. K. Diese zwey (Fig. 34.) haben einerley Grundlinien (auf C D zeigend) und stehen zwischen einerley Parallelen (auf FG und HI zeigend) so, daß eine Seite des einen (auf CB oder BD zeigend) zugleich die Diagonale des andern ist u. s. w.

L. Dieses sind die drey möglichen Stellungen, welche zwey Parallelogramme, die einerley Grundlinie haben und zwischen einerley Parallelen stehen, haben können. In welcher dieser Stellungen sich nun ein Paar solche Figuren befinden mögen, so läßt sich alle Mahl beweisen, daß sie einander gleich seyn müssen, daher der Satz: Wenn zwey Parallelogramme einerley ꝛc. nie eine Ausnahme leidet.

Findet man es für nöthig, die Kinder von der Wahrheit dieses Satzes noch durch andere Anschauungen zu überzeugen zu suchen, so kann man dieß folgender Massen bewerkstelligen: Man nehme Tab. VII. fig. 2. zur Hand und spreche etwa: hier habe ich ein Parallelogramm ABCD, welches aus vier gleichen Quadraten besteht, die, wenn man jedes derselben durch eine Diagonale zertheilt, zusammen 8 solche Dreyecke geben, wie hier m und n sind. Hier ist ein anderes Parallelogramm EFCD, welches mit dem erstern einerley Grundlinie hat und mit ihm zwischen einerley Parallelen steht. Dieses ist, wie ihr seht, aus lauter Dreyecken zusammengesetzt, welche lauter Hälften von Quadraten sind, die mit denen, aus welchen das Parallelogramm ABCD besteht, einerley Größe haben. Jedes dieser

Dreyecke ist also gerade so groß, als eines der Dreyecke, die entstehen würden, wenn man die 4 Quadrate von ABCD durch Diagonalen halbirte. Daraus folgt, daß die 8 Dreyecke des Parallelogramms EFCD zusammengenommen gerade den nämlichen Flächenraum in sich fassen müssen, welchen diese 4 Quadrate hier ABCD in sich fassen. Denn diese 4 Quadrate hier (zeigend) geben gerade 8 solche Dreyecke (auf EFCD zeigend); und diese 8 Dreyecke geben umgekehrt 4 solche Quadrate. Daraus folgt unleugbar, daß diese 2 Parallelogramme (ABCD und EFCD) einerley Größe haben müssen. — —

Hier (Tab. VII. fig. 2.) habe ich ein Paar andere Parallelogramme, welche wie diese hier (fig. 36. Tab II.) so gegen einander stehen, daß eine Seite ꝛc. Das Parallelogramm Aa Bb Cc Dd besteht aus 8 kleinern, aber gleichen Quadraten, und aus eben so vielen solcher Quadrate besteht auch das Parallelogramm becd, wovon ihr euch überzeugen könnt, wenn ihr des letztern Theile zusammen zählt. Ihr findet nämlich darin 1) vier ganze, 2) vier halbe und 3) 8 Viertel *), folglich ebenfalls 8 ganze Quadrate, die mit denen, worein abcd zerlegt ist, einerley Größe haben. Hieraus seht ihr, daß das eine dieser Parallelogramme eben so viel Flächenraum hat, als das andere.

L. Wer den Lehrsatz, von dessen Wahrheit ich euch jetzt auf mancherley Weise zu überzeugen gesucht

*) Man zeige den Kindern, durch welche Linien einige ganze Quadrate in Hälften und einige von diesen aufs neue in Hälften, die Ganzen also in Viertel, getheilt werden.

sucht habe, recht gefaßt hat, der wird mir sagen können, wie man zwey einander unähnliche aber gleiche Parallelogramme verzeichnen kann. Wer sagt mir dieses? K. Ich, ich ꝛc.

L. Nun ich will sehen, ob du dieses kannst. Carl soll zwey solche Parallelogramme verzeichnen und du sollst ihm nach und nach (theilweise) vorsagen, was er thun muß. K. Nun, Carl, verzeichne ein Parallelogramm nach belieben. (Carl verzeichnet z. B. GHIK Fig. 35. Tab. II.) Jetzt verlängere die Seite, welche der Grundlinie gegen, übersteht. (Carl verlängert.) Nun ziehe aus den Endpuncten der Grundlinie zwey Parallelen an die gegenüberstehende verlängerte Seite. (Carl zieht z. B. IL und KM.)

L. Aus welchem Grunde kannst du denn jetzt behaupten, daß diese zwey Parallelogramme einander gleich seyn? K. Weil sie ꝛc.

L. Gut! Nun gebe ich hier ein rechtwinklichtes Parallelogramm mit dem Auftrage es in ein gleich großes schiefwinklichtes zu verwandeln. Wer kann diesen Auftrag vollziehen? K. Ich ꝛc.

L. Carl, was behauptet jetzt N. N. thun zu können? K. Er behauptet, daß er ꝛc.

L. Nun soll August diese Verwandlung vornehmen, N. N. soll ihm aber vorsagen, was er thun soll. K. Verlängere die Seite dieses rechtwinklichten Parallelogramms, welche der Grundlinie gegenübersteht. (August verlängert.) Nun ziehe aus den Endpuncten ein Paar Parallelen unter schiefen Winkeln an die gegenüberstehende Seite. (August thut dieses.)

L. Mein

L. Mein Auftrag ist gehörig vollzogen worden. Jetzt soll Theodor ein schiefwinklichtes Parallelogramm in ein gleich großes rechtwinklichtes verwandeln und Emmerich soll ihm vorsagen, was er, um dieses zu bewerkstelligen, thun muß. Emmerich. Nun verzeichne ein schiefwinklichtes Parallelogramm. (Theodor verzeichnet.) Emmerich. Verlängere die der Grundlinie gegenüberstehende Seite links (rechts.) (Theodor verlängert.) Emmerich. Nun ziehe aus den Endpuncten der Gruudlinie senkrechte Linien an die gegenüberstehende Seite.

L. Das war recht! Jetzt gebe ich hier (Fig. 37. Tab. II. ohne e f verzeichnend) ein rechtwinklichtes Parallelogramm und dazu diesen Winkel (A Fig. 33. Tab. II.) Wer sagt mir wohl, was zu thun ist, wenn ein anderes Parallelogramm von gleicher Größe soll gemacht werden, das aber zwey Winkel hat, wovon jeder dem gegebenen gleich ist? K. Man verfährt wie vorhin, stellt aber die aus dem Puncte C zu ziehende Linie so, daß sie mit CD einen Winkel macht, der dem gegebenen gleich ist.

Da haben wir aber nur Einen Winkel in unserm Parallelogramme, der dem gegebenen gleich ist. K. Der gegenüberstehende Winkel wird diesem auch gleich.

L. Richtig! Nun soll Carl das verlangte Parallelogramm mit dem gegebenen Winkel bilden. K. (bilden das verlangte Parallelogramm, indem sie den gegebenen Winkel A an dem Punct C über die Linie CD tragen, seinen Schenkel bis

an

an die verlängerte AB ziehen und dann das Parallelogramm gar vollenden).

Diese Übung wird eine Zeitlang fortgesetzt.

L. Gut! Ich habe jetzt gesehen, daß ihr von unserm vorhin gelernten Lehrsatze Anwendung machen könnt.

Sechsunddreyßigster Satz.

Lehrsatz.

L., (welcher Fig. 38. verzeichnet hat.) Hier habe ich abermahls 2 Parallelogramme zwischen einerley Parallelen verzeichnet, ohne daß jedoch dieser Fall mit dem vorhergehenden, wo ebenfalls 2 Parallelogramme zwischen 2 Parallelen standen, ganz einerley wäre. Könnt ihr mir wohl sagen, worin dieser Fall von den vorhergehenden verschieden ist? K. Hier haben die 2 Parallelogramme nicht einerley Grundlinie, wie in den vorhergehenden Fällen.

L. Richtig! Aber — dieß merkt — sie haben gleiche (gleich große) Grundlinien. Denn ich habe CD so groß als GH gemacht. Nun sagt mir, was euch von diesen beyden Parallelogrammen bekannt ist. K. Sie stehen zwischen einerley Parallelen und haben gleiche Grundlinien.

L. Ob in diesem Falle ein Paar Parallelogramme auch einander gleich seyn müssen oder nicht, das

wollen wir mit einander untersuchen. Um aber diese Untersuchung anstellen zu können, müssen wir die erste unserer Regeln befolgen und einige Puncte durch gerade Linien mit einander verbinden. Ich ziehe die Hülfslinie CD und EF, wodurch wir ein drittes Parallelogramm bekommen*). Nennt mir dieses einmahl. K. EFCD.

L. Durch dieses Parallelogramm haben wir die 2 zuerst verzeichneten mit einander in Verbindung gebracht, so daß wir nun ihr Verhältniß zu einander erforschen können. Wie sich die Parallelogramm ABCD und EFCD zu einander verhalten müssen, das könnt ihr mir jetzt schon sagen. K. Diese müssen einander gleich seyn.

L. Diese eure Behauptung ist der Schlußsatz eines Schlußes, den ich einmahl vollständig von euch hören möchte. Wer sagt mir ihn? K. Wenn 2 Parallelograme einerley ꝛc.; hier sind ꝛc. folglich ꝛc.

L. Gut! Jetzt bedenkt, daß wir in einem Parallelogramme jede Seite, also auch hier in diesem (zeigend) EF zur Grundlinie annehmen können, und sagt mir, wie sich wohl die Parallelogramme EFCH und EFGD zu einander verhalten müssen. K. Diese müssen auch einander gleich seyn.

L. Warum behauptet ihr dieses? K. Weil diese beyden Parallelogramme einerley Grundlinie (EF) haben und zwischen einerley ꝛc.

L. Nunmehr könnt ihr mir durch Hülfe eines unserer

*) Der Kürze wegen nehme ich ohne Beweis an, daß EFCD ein Parallelogramm sey.

unserer Grundsätze sagen, wie sich die Parallelogramme ABCD und EFGH zu einander verhalten müssen. Wer sagt mirs? K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Nach welchem Grundsatze muß man dieses behaupten? K. Nach dem: wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so ꝛc.

L. Welches sind denn hier in unserer Figur die zwey Größen, die einer dritten gleich sind? K. Die 2 Parallelogramme ABCD und EFGH.

L. Und die dritte Größe ist —? K. EFCD.

L. Jetzt sagt mir, ob man nur dann von 2 Parallelogrammen behaupten dürfe, daß sie einander gleich seyn, wenn sie einerley Grundlinie haben und zwischen ꝛc. K. Nein.

L. In welchem Falle kann man denn dieses noch behaupten? K. Wenn sie zwar verschiedene, aber gleiche Grundlinien haben und zwischen einerley Parallelen stehen.

L. Wenn wir nun diesen jetzt bewiesenen Lehrsatz mit dem vorhergehenden verbinden und in einem einzigen Satze angeben wollten, unter welchen Bedingungen ein Paar Parallelogramme gleiche Größe haben müssen, wie müßten wir uns da wohl ausdrücken? K. Wenn 2 Parallelogramme einerley oder gleiche Grundlinien haben und zwischen einerley Parallelen stehen; so sind sie einander gleich.

L. Gut! Die Wahrheit dieses Satzes kann ich euch auch durch Hülfe dieser Zeichnung (Tab. VII.

Fig. 2.) noch bestätigen. Es sind hier eine Menge kleiner Parallelogramme (Quadrate) verzeichnet, die alle, ohne Ausnahme, einander gleich sind, und wovon wir jedes, der Kürze wegen, Q nennen wollen. Wenn ihr nun das größere Parallelogramm hier AGCH betrachtet, so findet ihr, daß es mehrere Q in sich faßt. Wie viel es deren enthält, könnt ihr mir sagen. K. Acht.

L. Nun betrachtet das Parallelogramm IKLM, dessen Grundlinie LM gerade so groß als die Grundlinie (CH) des Parallelogramms AGCH ist, und das mit diesem zwischen einerley Parallelen steht, und sagt mir, aus welchen Figuren es zusammengesetzt ist. K. Aus kleinen Quadraten (Parallelogrammen) und Dreyecken.

L. Der wie vielste Theil von einem solchen kleinen Quadrate ist denn ein jedes dieser in IKLM enthaltenen Dreyecke? K. Der halbe.

L. Woher wißt ihr dieses? K. Weil die Diagonale rc.

L. Nun seht, wie viel ganze und wie viel halbe Q in dem Parallelogramme IKLM enthalten sind. K. Vier ganze und acht halbe.

L. Wie viel macht das alles zusammengenommen ganze Q? K. Acht.

L. Da enthält also das ganze Parallelogramm IKLM eben so wohl 8 Q, als das Parallelogramm AGCH. Wie müssen sich demnach beyde Parallelogramme zu einander verhalten? K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Freylich! Das eine enthält ja gerade so viel und so große Theile als das andere. Daher kann

kann ich auch aus den Theilen, woraus dieses Parallelogramm (IKLM) besteht, ein Parallelogramm, das so groß als AGCH ist, zusammensetzen.

Man bilde hier mit 4 Trapezien und 4 Dreyecken von Nro. 13. vier Quadrate, und lege sie so an einander, wie die 4 Quadrate in dem Parallelogramme IKLM Tab. VII. fig. 2. liegen. Hierauf nehme man die 8 Dreyecke Nro. 14. und lege sie so an die Quadrate, wie die Figur IKLM zeigt, wodurch ein schiefwinklichtes Parallelogramm entsteht, welches man dann in ein rechtwinklichtes, wie AGCH verwandelt und somit zeigt, daß das letztere den nämlichen Flächenraum in sich halte, welchen das erstere in sich hielt. Wie diese Verwandlung geschehen müsse, fällt von selbst in die Augen. Man macht aus den 8 Dreyecken Nro. 14. 4 Quadrate und stellt dann die 8 Figuren dieses Namens so an einander, wie sie in AGCH stehen.

L. Jetzt will ich sehen, wer von dem Lehrsatze: Zwey Parallelogramme, die gleiche Grundlinien ꝛc. Anwendung machen und mir 2 Parallelogramme von einerley Größe verzeichnen kann, ohne daß jedoch beyde auf einerley Grundlinien stehen, oder einander ähnlich sind. K. (ziehen zwey Parallelen, stechen auf der einen gleiche Stücke und beschreiben darüber Parallelogramme von verschiedener Gestalt, wie z. B. Fig. 38.)

Nun lasse man auch wie vorhin rechtwinklichte Parallelogramme in schiefwinklichte, zu denen bald ein Winkel gegeben ist, bald nicht, und schiefwinklichte wieder in rechtwinklichte verwandeln, der jedes Mahl neu entstehenden Figur aber eine besondere Grundlinie geben.

Siebenunddreyßigster Satz.

Erklärung und Zusatz.

L., (welcher einem Kinde einen Maßstab von etwa 5 oder 6 Schuh Länge giebt.) Hier, Carl, nimm diesen Maßstab und miß damit die Höhe dieses Tisches. K. (setzt ohne Zweifel den Maßstab senkrecht auf den Fußboden, mißt und sagt z. B.: der Tisch ist 2½ Schuh hoch.

L. 2½ Schuh? Ich will doch sehen, ob ich nicht eine größere Höhe finde. (Nimmt den Maßstab und setzt ihn so schief von dem Fußboden gegen den Tisch, daß er sprechen kann:) Ja wirklich! Seht, 5 (6) Schuh und nicht 2½ ist der Tisch hoch. K. Ja, Sie haben nicht recht gemessen.

L. Was hätte ich denn für einen Fehler gemacht? K Sie haben den Maßstab nicht recht gehalten (angelegt.)

L Nun, ich habe ihn schief von dem Fußboden gegen den Tisch zu gehalten. War denn das nicht recht? K. Nein.

L. Welche Richtung hätte er denn gegen den Fußboden haben müssen? K. Die senkrechte.

L. Da könnt ihr mir ja wohl sagen, ob man die Höhe eines Körpers nach einer schiefen oder nach einer senkrechten Linie messen muß. Sagt mir dieß K. Nach einer senkrechten.

L. Richtig! So oft wir die wahre Höhe eines Körpers erfahren wollen, so müssen wir die senk-

rechte Linie messen, die man von seiner Spitze bis auf die Fläche, worauf er steht, ziehen kann. Gesetzt, ich mäße die Höhe eines Hauses rc. nach einer schiefen Linie, würde ich da mehr oder weniger Schuhe, Ellen rc. finden, als die wahre Höhe beträgt? K. Mehr.

L. Freylich! Darum habe ich vorhin, als ich die Höhe dieses Tisches messen wollte, 5 (6) Schuh gefunden, da sie doch, wie Carl richtig angegeben hat, nur $2\frac{1}{2}$ Schuh beträgt. Nun denkt, ich zöge von einem gewissen Puncte da oben an unserer Stubendecke eine senkrechte und eine schiefe Linie herab auf den Fußboden, und sagt mir, welche dieser Linien die kürzere seyn müßte. K. Die senkrechte.

L. Richtig! D e n n d i e s e n k r e c h t e L i n i e — dieß merkt ja wohl — d i e i c h v o n e i n e m g e w i s s e n P u n c t e a u f e i n e a n d e r e L i n i e z i e h e n k a n n, i s t u n t e r a l l e n a n d e r n L i n i e n, d i e n o c h v o n d i e s e m P u n c t e a u f d i e s e L i n i e g e z o g e n w e r d e n k ö n n e n, d i e k ü r z e s t e *) Jetzt denkt, dieses (man stelle ein Paar Bretchen auf einen Tisch so schief gegen einander, wie die zwey Seiten eines Daches stehen) wäre ein Dach, dessen Höhe wir messen sollten, und sagt mir, ob ich recht verfahre, wenn ich so messe (einen Maßstab oder Faden über ei-

*) Ich bringe absichtlich diesen Satz, der in den mathematischen Lehrbüchern erwiesen wird, hier nur im Vorbeygehen bey.

nes der schiefstehenden Bretchen von unten nach oben hinlegend.) K. Nein.

L. Warum kann dieses Verfahren nicht recht seyn? K. Weil man die Höhe eines Körpers nicht nach einer schiefen Linie messen darf. (Weil Sie nicht nach der senkrechten Linie messen.)

L. So wollen wir denn eine senkrechte Linie ziehen (einen Faden, woran etwa ein Stückchen Bley hängt, vorn an den Vereinigungspunct der beyden Bretchen haltend). Seht, diese Linie (denn als eine solche sehen wir jetzt diesen Faden an) ist von der Spitze dieses seyn sollenden Daches auf die Fläche, worauf es steht, senkrecht gezogen und zeigt uns daher die Höhe desselben an. Und da dieser Faden $\frac{1}{2}$ (1) ꝛc. Fuß mißt, so sagen wir: dieses seyn sollende Dach ist einen halben Fuß hoch. — Jetzt stelle ich hier ein Dreyeck auf diesen Tisch (ein mit Nro. 6. gebildetes Dreyeck in der Lage auf den Tisch stellend, wie Fig. 27. zeigt), und gebe Carln den Auftrag, mir seine Höhe mit Hülfe dieses Fadens zu messen. K. (hält nun ohne Zweifel den Faden an den Punct A so, daß er auf die Linie BC senkrecht fällt).

L. So ist es recht! Die Länge dieses Fadens zeigt die Höhe dieses Dreyecks an. Jetzt will ich sehen, wer mir sagen kann, was ich thun muß, um die Höhe dieses Dreyecks (Fig. 27 ohne AD verzeichnend) zu finden. Um euch in den Stand zu setzen, mir dieses bestimmt angeben zu können, will ich euch sagen, daß dieß hier (auf A zeigend) die Spitze und dieß (auf BC zeigend) die Grundlinie die-

dieses Dreyecks ist. K. Da müssen Sie von der Spitze dieses Triangels auf seine Grundlinie eine senkrechte Linie ziehen.

L. Recht! Das will ich auch thun (A D ziehend). Welche Linie müssen wir nun messen, wenn wir sagen wollen, wie hoch dieses dreyeck ist? K. Die A D.

L. Gut! Aber wer sagt mir, was ich thun muß, wenn ich die Höhe dieses Dreyecks (Fig. 29. ohne die punctirten Linien verzeichnend) finden will, da, wie der Augenschein lehrt, von seiner Spitze kein Perpendikel auf seine Grundlinie gefällt werden kann? K. —

L. Hier ist das Auskunftsmittel, daß ich die Grundlinie verlängere und dann von der Spitze A auf diese Verlängerung ein Loth fälle (eine senkrechte Linie ziehe). Seht, so: (die punctirten Linien ziehend). Welche Linie zeigt nun die Höhe dieses Dreyecks an? K. Die A D.

L. Könnt ihr mir sagen, von wo aus und wohin diese senkrechte Linie gezogen ist? K. Von der Spitze dieses Triangels auf die verlängerte Grundlinie desselben.

L. Richtig! Nun will ich sehen, wer folgenden Satz merken und ihn nachsagen kann. Die senkrechte Linie, welche man von der Spitze eines Triangels (auf A Fig. 27. zeigend) auf seine Grundlinie (auf B C Fig. 27. zeigend) oder deren Verlängerung (auf D E Fig. 29. zeigend) ziehen kann, wird seine (des Triangels) Höhe genannt. K.

(wiederhohlen diesen Satz, bis er ihnen geläufig ist, und zeigen dabey, wie vorhin der Lehrer gethan hat, die Linien und Puncte, die sie nennen.)

L. Hier lege ich jetzt einen (mit Nro. 6. gebildeten) Triangel her und frage, welches wohl seine Grundlinie ist. K. Man kann jede Seite dafür annehmen.

L. Gut! Ich kann ihn so auf diese Seite (zeigend) und so und so herstellen. Stelle ich ihn so (das Dreyeck auf eine beliebige Seite stellend), so ist dieses (zeigend) seine Grundlinie, und eine senkrechte Linie von dieser Spitze (zeigend) auf seine Grundlinie gezogen, ist seine Höhe. Stelle ich ihn aber so (ihn auf eine andere Seite stellend), so ist auch dieß (zeigend) seine Grundlinie und eine senkrechte Linie von hier bis hieher gezogen seine Höhe u. s. w. Nun möchte ich wohl wissen, ob mir eins von euch mit diesem Faden (woran ein Stückchen Bley hängt) die Höhe dieses (mit den Stäben Nro. 5. nach Fig. 39. gebildeten) Parallelogramms messen kann. K. (kommen meistens darauf, daß sie den Faden an die der Grundlinie entgegen gesetzte Seite halten und wie CD (Fig. 39.) herabhängen lassen.

L. Das habt ihr getroffen. Der von hier bis hieher (zeigend) reichende Faden, der jetzt eine auf die Grundlinie von der entgegengesetzten Seite dieses Parallelogramms gezogene senkrechte Linie vorstellt, zeigt die Höhe dieses Parallelogramms an. Und da er, wie euch dieser Maßstab zeigt, 8 ꝛc. Zoll lang ist, so sagen wir: das Parallelogramm ist 8 Zoll hoch. Nun will ich doch sehen, ob ihr mir auch dieses Parallelo-

lelogramms (das erst gemessene Parallelogramm so verschiebend, daß es in die Lage von Fig. 40. kommt, und eine von der obern Seite gezogene senkrechte Linie über seine Grundlinie hinausfällt) Höhe mit diesem Faden messen könnt. K. (halten ohne Zweifel den Faden, wie i k Fig. 40 zeigt.)

L. Aber da fällt ja diese senkrechte Linie (der Faden) nicht auf die Grundlinie des Parallelogramms? K. Das thut nichts, sie darf auch auf die Verlängerung der Grundlinie fallen.

L. Ich sehe, daß ihr von dem vorigen Falle, der bey den Dreyecken da war, auf diesen, und zwar ganz richtig, schließt. Nunmehr wird mir derjenige, welcher gemerkt hat, was man unter der Höhe eines Dreyecks versteht, auch sagen können, was man die Höhe eines Parallelogramms nennt. K. Diejenige senkrechte Linie, welche man auf die Grundlinie oder deren Verlängerung von der entgegengesetzten Seite ziehen kann.

L. Richtig! Jetzt sucht mir geschwind die Höhen dieser Parallelogramme (einige Figuren dieses Namens an die Tafel verzeichnend). K. (ziehen z. B. die Linien CD und IK Fig. 39. und 40. und messen sie.)

L. Das war recht! Nun merkt erstlich, daß ich bey einem Parallelogramm auch jede beliebige Seite zur Grundlinie annehmen kann, zweytens, daß man bey einem rechtwinklichten Parallelogramme keine besondere Linie ziehen, sondern nur eine seiner Seiten, die auf der Grundlinie aufstehen, messen darf, wenn man seine Höhe finden will, weil bey

einer solchen Figur eine auf die Grundlinie von der entgegengesetzten Seite gezogene senkrechte Linie gerade so lang ist, als eine links und rechts stehende Seite. Denn da die obere und untere Seite, die wir die Grundlinie nennen, parallel sind, so müssen ja, wie ihr neulich gelernt habt, alle zwischen diesen beyden Seiten gezogenen senkrechten Linien einander gleich seyn. Daher ist die Linie e f (Fig. 37.) so lang als A C. — Jetzt sagt mir, was ich nur messen dürfte, wenn ich die Höhe dieses Parallelogramms (ein mit Nro. 5. gebildetes rechtwinklichtes Parallelogramm vorhaltend) finden wollte. K. (zeigen auf die rechte oder linke Seite und sprechen etwa:) Diese oder diese Seite.

L. Warum dürfen wir denn hier nicht erst, etwa mit Hülfe dieses Fadens, ein Perpendikel von der obern Seite auf die Grundlinie fällen. K. Weil schon diese zwey Seiten, nämlich die linke und die rechte, senkrecht auf der Grundlinie stehen und daher schon die Höhe dieses Parallelogramms anzeigen.

L. Gut! Jetzt betrachtet die Figuren (Fig. 37, 39, 40, 41, 42.), die ich hier an der Tafel verzeichnet habe. Ihr findet hier drey Parallelogramme und zwey Dreyecke zwischen einerley Parallelen, und zugleich diejenigen Linien gezogen, welche die Höhen dieser Figuren anzeigen. Welche Linie zeigt wohl in dem rechtwinklichten Parallelogramm A B C D seine Höhe an? K. A C oder B D.

L. Und welche Linien zeigen die Höhen der übrigen Figuren an? K. C D zeigt die Höhe des Parallelogramms E F G H (Fig. 39.) an u. s. w.

L. Soll-

L. Solltet ihr mir wohl sagen können, wie sich die Linien BD (Fig. 37.) CD (Fig. 39.) ik (Fig. 40.) lk, und ID zu einander verhalten müssen? K. Diese müssen alle einander gleich seyn.

L. Und der Grund dieser eurer Behauptung ist —? K. Weil alle senkrechte Linien, die zwischen einerley Parallelen stehen, einander gleich seyn müssen.

L. Richtig! Da ihr nun wißt, daß die genannten Linien einander gleich sind, so wißt ihr ja auch, wie sich die Höhen dieser 5 Figuren zu einander verhalten. Wie? K. Sie sind einander gleich.

L. Recht! Die eine dieser Figuren ist gerade so hoch, als die übrigen. So wie nun hier diese (zeigend) zwey Parallelogramme und diese zwey Dreyecke, so wie dieses Parallelogramm (zeigend) und dieses Dreyeck hier einerley Höhe haben, so haben alle Mahl Parallelogramme, oder Dreyecke, oder Parallelogramme und Dreyecke, die zwischen einerley Parallelen stehen, gleiche Höhe. Es ist daher gleichviel, ob wir sagen: diese zwey Parallelogramme stehen zwischen einerley Parallelen, oder: haben gleiche Höhe. Deswegen können wir den Lehrsatz: Parallelogramme, die einerley oder gleiche Grundlinien haben und zwischen einerley Parallelen stehen, auch noch etwas verändert ausdrücken, indem wir Statt des Ausdrucks: zwischen einerley etc. noch einen andern wählen können. Wer getraut sich wohl diesen Lehrsatz mit der Veränderung, die ich meyne, auszudrücken? K. Parallelogramme, die einerley oder gleiche Grundlinien

nien und gleiche Höhe haben, sind einander gleich.

Achtunddreyßigster Satz.

Lehrsatz.

L., (welcher die Linien MN und OP und BA (Fig. 43.) verzeichnet hat.) Von den 2 Winkeln m und n hier sage ich euch, daß sie einander gleich sind; dagegen sagt mir, wie die Linien MN u. OP gegen einander stehen. K. Sie sind gleichlaufend.

L. Das habt ihr durch einen Schluß herausgebracht, den ich einmahl vollständig hören möchte. K. Wenn 2 gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß ꝛc. die Linien MN und OP ꝛc. folglich ꝛc.

L. Gut! (Nachdem die AC gezogen worden ist.) Was habe ich denn jetzt für eine Figur vollendet? K. Ein Dreyeck.

L. Nennt seine Grundlinie. K. BC.

L. (BD und DC ziehend.) Was bilden denn die 2 Linien BD und DC mit BC für eine Figur? K. Auch ein Dreyeck.

L. Die 2 Dreyecke ABC und DBC haben ein Paar Merkmahle, die wir erst kürzlich an einigen von uns verzeichneten Parallelogrammen wahrnahmen. Findet ihr wohl diese Merkmahle? K. Ach ja. Beyde Dreyecke haben einerley Grundlinie und stehen zwischen einerley Parallelen.

L. Rich-

L. Richtig! Jetzt wollen wir untersuchen, ob vielleicht Dreyecke, die diese Merkmahle haben, auch einander gleich sind. Um diese Untersuchung anstellen zu können, ziehe ich die Linie BM parallel mit CA, und CN parallel mit BD. Jetzt betrachtet die Figur MACB und sagt, welcher Name ihr gebührt? K. Der Name Parallelogramm.

L. Was für einen Grund habt ihr denn, diese Figur für ein Parallelogramm zu halten? K. Die parallele Lage der gegenüberstehenden Seiten.

L. Könnt ihr außer MACB nicht noch ein Parallelogramm finden? K. BDCN ist eins.

L. Wie mögen sich wohl diese 2 Parallelogramme zu einander verhalten? K. Diese müssen einander gleich seyn.

L. Warum behauptet ihr dieses? K. Weil beyde einerley Grundlinie und gleiche Höhe haben.

L Gut! Der wie vielste Theil von dem Parallelogramme MACB ist den wohl der Triangel ABC*)? K Der halbe.

L. Woher kann man dieses wissen? K. Weil das Parallelogramm MACB durch die Diagonale BA halbirt ist.

L. Der wie vielste Theil von dem Parallelogramm BCND ist denn der Triangel BDC**) K. Auch der halbe.

L. Wor-

*) Man lösche hier das in ACB befindliche Stück von der BD weg, weil die Kinder dadurch irre werden.

**) Nachdem das vorhin weggelöschte Stück von BD wieder gezogen worden ist, lösche man von AC das Stück weg, welches in BDC steht.

L. Woraus erhellt dieß? Daraus, weil CD die Diagonale ist, welche das Parallelogramm DNCB halbirt.

L. Nun ist also ausgemacht, daß unsere 2 vorhin verzeichneten Dreyecke die Hälften von 2 gleichen Parallelogrammen sind. Da aber die Hälften gleich seyn müssen, wenn die Ganzen gleich sind, so können wir von diesen beyden Triangeln behaupten — nun was? K. Daß sie einander gleich seyn müssen.

L. Richtig! Was wir aber von diesen 2 Triangeln erwiesen haben, das läßt sich von allen Triangeln beweisen, welche die vorhin angegebenen Merkmahle dieser 2 Triangel haben, daher können wir einen gewissen Lehrsatz aufstellen, den ich von euch ausgedrückt hören möchte. K. Dreyecke, welche einerley Grundlinien und gleiche Höhe haben (zwischen einerley Parallelen stehen) sind einander gleich.

L. Aber — das merkt ja wohl — deßhalb sind sie einander nicht ähnlich. Neulich (vor einiger Zeit) haben wir Merkmahle der Gleichheit und Aehnlichkeit zweyer Dreyecke gefunden, jetzt haben wir aber nur ein Merkmahl ihrer Gleichheit gefunden. Diese 2 Triangel hier (Fig. 43.) können also, da sie nur einander gleich sind, d. h. da beyde nur einen gleich großen Flächenraum einnehmen, ohne daß sie einerley Gestalt haben, auch einander nicht decken. — — Nun will ich diese Figur (Fig. 43.) wieder weglöschen und sehen, wer sie nach meiner Angabe wieder wird verzeichnen können. Ziehet 2 Parallelen und nennt die obere MN und die untere OP. — — Auf OP stechet ein Stück von

von willkührlicher Länge ab und nennet es BC. —— BC nehmt als Grundlinie an, errichtet darauf 2 verschiedene Dreyecke, die ihre Spitzen auf der Linie MN haben. — Nun ziehet aus dem Puncte B bis an die gegenüberstehende Linie MN eine andere parallel mit AC. — Jetzt zieht aus C bis an die gegenüberstehende Linie eine andere parallel mit BD. — Wer von euch kann es nun machen, wie ich es erst gemacht habe und die nämliche Figur, die wir zum dritten Mahle verzeichnen wollen, dictiren? (Einige Kinder dictiren nach der Reihe, und die übrigen verzeichnen Fig. 43.)

L. Wer sagt mir jetzt den Lehrsatz noch Ein Mahl, den wir an dieser Figur (Fig. 43.) erwiesen haben? K. Dreyecke, welche ꝛc.

L. Wer trägt mir aber den Beweis dieses Satzes zusammenhängend vor? K. (üben sich im richtigen und bestimmmten Vortrage dieses Beweises.)

L. Jetzt will ich euch wieder zeigen, daß die Erfahrung mit dem von euch erst erwiesenen Satze übereinstimmt. Hier (Tab. VII. Fig. 1.) sind eine Menge kleiner aber lauter gleicher Quadrate und auch zwey Dreyecke, die einerley Grundlinie haben und zwischen einerley Parallelen stehen, verzeichnet. Der eine dieser Triangel, nämlich ABC faßt 28 ganze und 6 halbe, also 31 solche kleine Quadrate in sich. Aber gerade so viel von diesen nämlichen Quadraten begreift auch der Triangel DCB in sich, wie ihr gleich sehen werdet, wenn ihr die kleinen Quadrate in beyden Triangeln zählet. Hieraus erhellet, daß der eine dieser

Triangel so groß als der andere seyn müsse. — — Hier habe ich ferner, wie ihr seht, sechs gleiche Dreyecke, aus denen ich zwey größere zusammensetzen will. (Man bilde mit 6 Dreyecken von Nro. 14. die 4te Fig. der 6ten Taf.) — So! Wenn ihr euch jetzt die Dreyecke a, b, c, d, vereinigt denkt, so haben wir dieses Dreyeck. (Man rücke hier das Dreyeck ABC etwas von e u. f ab, damit es deutlich in die Augen falle.) Denkt ihr euch hingegen die Dreyecke a, d, e, f, vereinigt, so bekommen wir dieses Dreyeck (DBC etwas bey Seite rückend). Beyde Dreyecke haben hier diese Grundlinie (auf BC zeigend) gemein und stehen zwischen einerley Parallelen oder haben gleiche Höhe, denn jedes ist 4 rc. Zoll hoch. Unter diesen Umständen müssen nun, wie ihr vorhin gelernt habt, beyde einander gleich seyn. Und daß dem wirklich so sey, sehet ihr: denn jedes von ihnen bestehet aus vier von den 6 Dreyecken, wovon ich euch vorhin sagte, daß sie einander gleich sind.

Neununddreyßigster Satz.

Lehrsatz.

L. Wer kann mir wohl zwey Dreyecke, welche gleiche Grundlinien haben, und zwischen einerley Parallelen stehen, verzeichnen? K. (verzeichnen Fig. 44.)

L. Was ist uns von diesen Dreyecken bekannt? K. Daß sie gleiche Grundlinien haben und zwischen ꝛc.

L. Nun wollen wir sehen, ob wir aus diesen Merkmahlen nicht auf die Gleichheit dieser Dreyecke schließen können. Zu dem Ende wollen wir hier bey diesem Dreyecke mit AB eine Linie parallel ziehen, die bey dem einen Endpuncte der Grundlinie anfängt und sich an der gegenüberstehenden Linie endigt. Das Nämliche wollen wir auch hier bei dem zweyten Dreyecke EFG thun. — So! Jetzt sagt mir, was ADBC für eine Figur ist. K. Ein Parallelogramm.

L. Woher wißt ihr dieses? K. Daher, weil die gegenüberstehenden Seiten parallel laufen.

L. Dieß ist der Fall auch bey der Figur EHGF, daher ist auch dieß ein Parallelogramm. Wißt ihr wohl, welches von diesen beyden Parallelogrammen das größere ist? K. Es ist keines größer als das andere.

L. Um diese Antwort geben zu können, mußtet ihr in Gedanken einen Schluß machen, den ich wieder vollständig von euch zu hören wünsche. K. Alle Parallelogramme, die gleiche Grundlinien haben und zwischen ꝛc. Hier sind ꝛc., folglich ꝛc.

L. Sollte mir wohl nunmehr eins von euch sagen können, wie sich die Dreyecke ABC und FEG zu einander verhalten müssen? K. Diese müssen einander gleich seyn.

L. Wie wolltet ihr mich aber hievon überzeu-

gen, wenn ich es nicht glauben wollte? K. Der Triangel ABC ist die Hälfte von dem Parallelogramm ADCB, weil eine Diagonale rc. u. EFG ist aus dem nämlichen Grunde die Hälfte von rc. Wenn nun aber die Ganzen einander gleich sind, so sind auch die Hälften einander gleich, folglich rc.

L. Gegen diese Gründe könnte ich nichts einwenden, und ich müßte euch Recht geben, wenn ich auch vorhin eure Behauptung hätte bezweifeln wollen. Nun sagt mir wieder, wie der Lehrsatz lauten muß, den wir jetzt bewiesen haben. K. Dreyecke, die gleiche Grundlinien haben und zwischen einerley Parallelen stehen oder gleich hoch sind, müssen einander gleich seyn.

L. Da werden wohl auch die zwey Dreyecke hier (man verzeichne die Dreyecke Fig. 43. aber jedes mit seiner eignen Grundlinie) die gleiche Grundlinien und Höhen haben, einander decken? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil sie nicht auch einander ähnlich sind.

L. Freylich! Nur die Gleichheit, nicht die Aehnlichkeit zweyer Dreyecke ist mit dem Umstande, daß sie gleiche Grundlinien und Höhen haben, unzertrennlich verbunden. Daher müssen auch diese zwey Dreyecke (Tab. VII. Fig. 1. EFG und Fig. 2. OPQ) an denen sich erst erwähnte Merkmahle befinden, gleiche Flächenräume einnehmen, ob sie gleich nicht einander ähnlich sind. Und daß dem so sey, findet ihr, wenn ihr die klei-

kleinen Quadrate, die jedes enthält, und die alle einander gleich sind, zusammenzählt.

Man sage nun den Kindern, daß in dem Dreyecke EFG (Fig. 1. Tab. VII.) einige Quadrate durch die punctirten Linien halbirt, und einige dieser Hälften, welches Parallelogramme sind, durch die Diagonalen aufs neue in zwey gleiche Theile getheilt seyn, und lasse sie dann die ganzen, halben und Viertelsquadrate zusammen zählen und davon die Summe der Ganzen (32) suchen. Eben so verfahre man mit dem Dreyecke OPQ, wo theils durch eine Seite desselben, theils durch die punctirten Linien ebenfalls einige Quadrate in Hälften und hievon wieder einige durch Diagonalen halbirt worden sind, und lasse auch hier die Ganzen, Halben und Viertel zählen und alles in Ganzen angeben, wo sich dann auch die Summe 32 finden wird. Bey dem kleinen Dreyecke mno (der obersten Spitze des Dreyecks OPQ) muß man den Kindern vorläufig sagen, daß, weil dieses Dreyeck mit dem Parallelogramm xnop gleiche Höhe, aber nur eine halb so große Grundlinie habe, es ein Viertel davon enthalte, oder: daß das Dreyeck onx, welches die Hälfte eines der vorhandenen gleichen Quadrate ist, durch die Linie om, welche von seiner Spitze auf die Mitte der Grundlinie gezogen ist, abermahls in zwey gleiche Theile getheilt werde, also das Δ mno 1/4 des ganzen Quadrats sey. Auf die nämliche Weise bringe man die Kinder zu der Uiberzeugung, daß der Triangel ABC Tab. VII. fig. 1. gleichen Flächenraum mit EFG Tab. VII. fig. 1. und mit OPQ Tab. VII. fig. 2. einnehme.

Vierzigster Satz.

Zusatz.

L. Wir wollen die vorhin (gestern) verzeichnete Figur (Fig. 44 ADBC) noch Ein Mahl betrachten. Sagt mir doch, ob die Grundlinie BC dem Dreyecke ABC oder dem Parallelogramm ABCD zugehört. K. Sie gehört beyden Figuren zu.

L. Nun könnt ihr mir sagen, was wir hier für Figuren wahrnehmen, und was sie mit einander gemein haben. K. Einen Triangel und ein Parallelogramm, welche die Grundlinie gemein (einerley Grundlinie) haben.

L. Und welche von beyden Figuren mag wohl etwas höher als die andere seyn? K. Es kann keine höher als die andere seyn.

L. Warum nicht? K. Weil beyde zwischen einerley Parallelen stehen.

L. Nun wißt ihr von diesen Figuren, nämlich von dem Dreyecke ABC und dem Parallelogramm ADBC zwey Merkmahle. Gebt mir sie noch Ein Mahl an. K. Sie haben einerley Grundlinie und stehen 2c.

L. Jetzt sagt mir geschwind, der wie vielste Theil dieser Triangel (ABC) von dem Parallelogramm ist, das mit ihm einerley Grundlinie und gleiche Höhe hat. K. Der halbe. (Die Hälfte.)

L. Freylich! Denn die Diagonale theilt ja, wie ihr längst schon wißt, jedes Parallelogramm in zwey

zwey Hälften. Nun merkt! Nicht nur von diesem, sondern von jedem Triangel läßt sich beweisen, daß er die Hälfte von einem Parallelogramme sey, das mit ihm einerley Grundlinie und gleiche Höhe hat. Wer diesen Satz verstanden und behalten hat, und bedenkt, daß hier (Fig. 45.) AG u. HI parallel sind, der wird mir sagen können, wie sich dieser Triangel hier (AHI Fig. 45.) zu diesem Parallelogramme (BGHI Fig. 45.) verhält. K. Der Triangel AHI muß halb so groß seyn, als das Parallelogramm.

L. Wie lautet der Obersatz zu dem Schlusse, den ihr jetzt in euren Gedanken gemacht habt? K. Jeder Triangel ist die Hälfte von einem Parallelogramme, das mit ihm rc.

L. Gut! Hier habe ich ein Dreyeck (eins von Nro. 11. vorzeigend): sagt mir von welcher Figur es die Hälfte ist. K. Von einem Parallelogramme.

L. Aber was muß das Parallelogramm, wovon dieses Dreyeck die Hälfte ist, für Merkmahle haben? K. Es muß mit diesem Dreyecke einerley Grundlinie und gleiche Höhe haben.

L. Richtig! Daß von einem solchen Pallallelogramme dieses Dreyeck wirklich die Hälfte ist, will ich euch zeigen. Hier (das eine Dreyeck Nro. 11. so an das vorgezeigte legend, daß ein Parallelogramm entsteht) habe ich ein solches Parallelogramm, dessen Merkmahle ihr erst angegeben habt. Dieß (zeigend) ist die Grundlinie sowohl des Dreyecks

 als

als des Parallelogramms, und beyder Höhe ist auch gleich. Daher ist dieses zuerst vorgezeigte Dreyeck gerade die Hälfte von dem ganzen Parallelogramme. Dieß seht ihr, wenn ich diese zwey Dreyecke auf einander lege, da ihr dann findet, daß eins gerade so groß als das andere ist. — Jetzt will ich sehen, wer folgende Befehle am pünctlichsten wird befolgen können. Ziehet ein Paar Parallellinien. K. (ziehen AL und HN Fig. 45. und 46.)

L. Stecht auf der untern dieser Linien ein beliebiges Stück ab, und beschreibt darüber ein Dreyeck, dessen Spitze in der gegenüberstehenden Linie liegt. K. (beschreiben AHI Fig. 45.)

L. Nun wählt auf der verlängerten Grundlinie dieses Dreyecks ein Stück, welches dieser Grundlinie gleich ist, und beschreibt darüber ein Parallelogramm, welches mit dem erst beschriebenen Dreyecke gleiche Höhe hat. K. (beschreiben KLMN Fig. 46.)

L. Carl, nun sage mir alles, was ihr jetzt nach und nach gethan habt. K. Zuerst haben wir ein Paar Parallelen gezogen, dann haben wir auf der untern ꝛc. ꝛc.

L. Wer kann mir wohl sagen, was von diesen beyden Figuren bekannt ist? K. Sie haben gleiche Grundlinien und Höhen.

L. Nun zieht einmahl die Diagonale in dem Parallelogramme KLMN. —— So! Könnt ihr mir wohl jetzt geschwind sagen, wie sich der Triangel LMN zu dem Triangel AHI verhalten muß?

K.

K. Diese beyden Triangel müssen einander gleich seyn.

L. Warum behauptet ihr dieß? K. Weil sie beyde gleiche Grundlinien und Höhen haben.

L. Wie verhält sich demnach der Triangel AHI zu dem Parallelogramme KLMN? K. Er ist halb so groß als das Parallelogramm.

L. Gut! Könnt ihr nun wohl den ganzen Satz, den wir jetzt erwiesen haben, gehörig ausdrücken? K. Wennn ein Dreyeck und ein Parallelogramm gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, so ist das Dreyeck die Hälfte von dem Parallelogramme.

L. Richtig! Daß auch dieser Satz durch die Erfahrung bestätigt werde, seht ihr an diesen Zeichnungen. Hier (Tab. VII. Fig. 1.) habe ich ein Parallelogramm ABCD und hier (Tab. VII. Fig. 2.) ein Dreyeck OPQ beyde Figuren haben gleiche Grundlinien und Höhen, und im Dreyecke zählen wir gerade halb so viel solcher kleiner Quadrate als das Parallelogramm ABCD enthält.

Man kann den hier bewiesenen Lehrsatz auch mit Hülfe von Nro. 13. und 14. bestätigen, wenn man damit fig. 5. und 6. Tab. VIII. bildet. Beyde Figuren haben gleiche Grundlinien und Höhen, und fig. 6. enthält gerade 1 Quadrat und 2 Triangel von der Größe, die diese Theile in fig. 5. haben, wovon sie gerade die Hälfte ausmachen, indem die AB das Parallelogramm fig. 5. halbirt. Daher deckt fig. 6. gerade die Hälfte von fig. 5.

Einundvierzigster Satz.

Aufgabe.

L. Jetzt will ich einige Befehle geben, und sehen, wer sie am pünctlichsten wird befolgen können. Verzeichnet ein Dreyeck nach Belieben. K. (verzeichnen z. B. ABC Fig. 44.)

L. Mit BC, der Grundlinie dieses Dreyecks, durch die ihr gegenüberstehende Spitze ziehet eine Linie parallel. K. (ziehen ND.) —

L. Aus einem Endpuncte der Grundlinie ziehet mit der diesem Puncte gegenüberstehenden Seite eine Linie parallel, welche die zuletzt gezogene Linie (ND) berührt. K. (ziehen CD.) —

L. Nun sagt, was wir durch dieses Verfahren für eine Figur erhalten haben. K. Ein Parallelogramm.

L. Und wie verhält sich dieses Parallelogramm zu dem zuerst verzeichneten (gegebenen) Dreyecke? K. Es ist noch Ein Mahl so groß.

L. Gut! Ihr habt jetzt eine gewisse Aufgabe aufgelöst. Wißt ihr wohl wie diese lauten muß? K. Ein Parallelogramm zu verzeichnen, das noch Ein Mahl so groß, als ein gegebenes Dreyeck seyn soll.

L. Recht! Wer kann mir aber sagen, was ich thun muß, um diese Aufgabe aufzuiössen. K. Erstlich müßen Sie mit der Grundlinie des gegebenen

nen Dreyecks durch die ihr gegenüberstehende Spitze eine Linie parallel ziehen u. s. w.*)

L. Aber wie wollt ihr beweisen, daß die Figur, die ich jetzt eurer Angabe gemäß verzeichnet habe, 1) ein Parallelogramm, 2) noch Ein Mahl so groß als das gegebene Dreyeck sey. K. (werden nun beydes mit leichter Mühe beweisen können.)

Nun lasse man theils aus freyer Hand, theils mit Hülfe des Parallellineals oder der Reißschiene und eines Reißbrettchens Parallelogramme, die doppelt so groß als gegebene Dreyecke sind, verfertigen.

Zweyundvierzigster Satz.

Aufgabe.

L. Könnt ihr wohl die Grundlinie dieses Dreyecks (A B C Fig. 47.) halbiren? K. O ja.

L. Nun so thut es und bemerkt dann blos den Halbirungspunct. K. (halbiren.)

L. Ist

*) Was die Kinder hier sagen, das thut der Lehrer. Drücken sie sich unbestimmt aus, so mache man in der Verzeichnung diejenigen Fehler, die gemacht werden können, ohne ihrer Angabe zuwider zu handeln. Sprächen sie z. B.: Sie müssen aus einem Puncte der Grundlinie eine gerade Linie ziehen, so ziehe man etwa aus der Mitte der Grundlinie die Linie, welche eine Seite des Parallelogramms werden soll.

L. Ist uns hier außer dem Halbirungspuncte kein anderer Punct mehr gegeben, so daß wir etwa die erste unserer Regeln befolgen können? K. Ja! Der Punct A.

L. Recht! Verbindet diese beyden Puncte durch eine gerade Linie. K. (ziehen AD.)

L. Wie viel und was für Figuren haben wir den jetzt bekommen? K. Zwey Dreyecke.

L. Wenn ich, wie ich jetzt thue, die Grundlinien beyder Dreyecke nach E verlängere und von ihrer gemeinschaftlichen Spitze A ein Loth auf diese Verlängerung fälle, so zeigt dieß Loth die Höhe der Dreyecke an. Nun sagt mir, wie sich beyder Höhen zu einander verhalten. K. Sie sind einander gleich.

L. Freylich! Denn die nämliche Linie, die die Höhe des einen anzeigt, zeigt ja auch die Höhe des andern an. Wie verhalten sich denn die Grundlinien dieser Dreyecke zu einander? K. Diese sind ja einander gleich, da wir die Linie BC halbirt haben.

L. Nun sind euch von diesen zwey Dreyecken zwey Merkmahle bekannt: welche? K. Sie haben gleiche Grundlinien und gleiche Höhen.

L. Und hieraus folgt — ? K. Daß beyde einander gleich seyn müssen.

L. In wie viel gleiche Theile haben wir so nach durch unser Verfahren dieses Dreyeck getheilt? K. In zwey.

L. Da haben wir es also halbirt, und ihr seyd

jetzt

jetzt gewiß im Stande mir zu sagen, wie man die Aufgabe: ein Dreyeck zu halbiren, auflösen muß. Wer sagt mir dieses? K. Man muß die Grundlinie halbiren und von dem Halbirungspuncte eine gerade Linie zu der gegenüberstehenden Spitze ziehen.

L. Nun soll Theodor dieses Dreyeck (eine solche Figur verzeichnend) halbiren und mir dann beweisen, daß es richtig halbirt sey. K. (thut dieß.)

Dreyundvierzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Hier (Fig. 48.) habe ich ein Dreyeck ABC verzeichnet, welches August halbiren soll. K. (zieht die Line AD.)

L. Bis jetzt haben wir nichts Neues, ich wünsche aber, daß wir eine neue Figur bekommen möchten, damit wir eine neue Untersuchung anstellen können, um vielleicht eine neue Wahrheit zu finden. Bisher haben wir immer von gewissen Puncten der uns gegebenen Dreyecke mit einigen ihrer Seitenlinien Parallelen gezogen und sind dadurch immer auf neue Wahrheiten geleitet worden. Könnten wir dieses Verfahren hier nicht auch anwenden? K. Ja.

L. Aber mit welchen der hier gegebenen Linien könnten wir allenfalls andere Linien parallel ziehen, ohne eben gerade die Figuren zu erhalten, die wir schon

schon gehabt und betrachtet haben? K. (sprechen hier bisweilen:) Mit AD und BD oder DC.

L. Richtig! Wir wollen erstlich mit BD eine Linie parallel ziehen, nur sagt, ob kein Punct gegeben ist, durch welchen oder von welchem aus wir sie etwa ziehen könnten. K. Der Punct A.

L. Gut! Durch A ziehe ich also mit BD eine Linie parallel. — So! Von welchen Puncten an und bis wie weit könnten wir denn mit AD eine Linie parallel ziehen? K. Von B oder C an bis an die Linie EA.

L. Recht! Ich will also von B aus bis an die Linie EA mit DA eine Linie parallel ziehen. — Jetzt haben wir wirklich etwas Neues; denn in dieser Stellung und Verbinduug hatten wir die hier verzeichneten Figuren noch nicht. Sagt mir nun, was wir gleich Anfangs für eine Figur hatten. K. Ein Dreyeck.

L. Nennt mir dieses. K. ABC.

L. Und was für eine Figur bekamen wir außer einigen neuen Dreyecken, als wir mit BD und AD Linien parallel gezogen hatten? K. Ein Parallelogramm.

L. Wie verhält sich denn die Höhe des Parallelogramms zur Höhe des Dreyecks ABC? K. Beyde Figuren stehen zwischen einerley Parallelen, also sind ihre Höhen einander gleich.

L. Aber wie verhält sich die Grundlinie des Parallelogramms zur Grundlinie des Dreyecks ABC? K. Die Grundlinie des Parallelogramms ist halb so groß, als die Grundlinie des Dreyecks.

L. Nun

L. Nun faßt alles zusammen und sagt, was euch von diesem Parallelogamme bekannt ist? K. Es hat mit dem Dreyecke ABC einerley Höhe, und eine Grundlinie, die halb so groß ist, als dieses Dreyeckes Grundlinie.

L. Gut! Dieses Parallelogamm nun wollen wir mit dem Dreyecke ABC vergleichen, um zu erfahren, wie sich beyde Figuren zu einander verhalten. Um uns kurz ausdrücken zu können, will ich jedes dieser Dreyecke nur mit einem Buchstaben bezeichnen. — Jetzt sagt mir geschwind, welches von den Dreyecken o und p wohl das grössere seyn mag. K. Es kann keines größer als das andere seyn.

L. Warum denn nicht? K. Weil es die durch die Diagonale AB entstandenen Hälften eines Parallelogramms sind.

L. Aber wie mag sich q zu p verhalten? K. q muß ebenfalls so groß als p seyn.

L. Aus welchem Grunde? K. Weil q und p die Hälften des ganzen Dreyecks ABC sind.

L. Nun sinnt einmahl nach und seht, ob ihr nicht herausbringt, wie sich o und q zu einander verhalten müssen. K. Diese zwey Dreyecke müssen auch einander gleich seyn.

L. Sagt mir den vollständigen Schluß, durch welchen ihr dieses heraus gebracht habt. K. Wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so rc. o und q sind zwey Größen, welche rc. folglich rc.

L. Wenn wir p zu o setzen, so erhalten wir das Parallelogramm EABD, und wenn wie die nämliche

liche Größe p zu q setzen, so erhalten wir den Triangel ABC. Könnt ihr mir nun wohl jetzt sagen, wie sich die beyden jetzt genannten Figuren zu einander verhalten? K. Die müssen ja einander gleich seyn.

L. Welcher unserer Grundsätze setzt euch in den Stand, mir dieß sagen zu können? K. Dieser: Gleiches zu Gleichem addirt, giebt gleiche Summen.

L. Recht! Wir haben also jetzt bewiesen, daß dieses Dreyeck (ABC) so groß als dieses Parallelogramm (EADB) ist. Diesen Beweis hätten wir aber nicht führen können, wenn das Parallelogramm nicht die Merkmahle hätte, auf die ich euch gleich Anfangs aufmerksam gemacht habe. Könnt ihr mir diese Merkmahle noch angeben? K. Ja.

L. So thut es. K. Das Parallelogramm EADB ist so hoch als das Dreyeck ABC, hat aber eine nur halb so große Grundlinie als dieses.

L. Gut! Nun merkt! So wie wir hier in diesem Falle die Gleichheit dieser zwey genannten Figuren nicht hätten erweisen können, wenn die erst von euch angegebenen Merkmahle nicht vorhanden gewesen wären; so könnten wir auch in keinem andern Falle die Gleichheit eines Dreyecks und Parallelogramms ohne diese Merkmahle darthun. Da ihr jetzt dieses wißt, so könnt ihr mir gewiß sagen, wenn oder unter welcher Bedingung man nur von einem Dreyecke und Parallelogramme behaupten dürfe, daß beyde einander gleich seyn. K. Wenn das Parallelogramm so hoch als das Dreyeck ist,

aber

aber eine nur halb so große Grundlinie als dieses hat.

L. Richtig! Nun drückt einmahl den Lehrsatz, den wir jetzt gelernt haben, vollständig aus. K. Ein Dreyeck ist so groß als ein Parallelogramm, wenn letzteres die nämliche Höhe, aber eine nur halb so große Grundlinie als ersteres hat.

L. Gut! Hier liegt ein Parallelogramm, das ich A nenne, und hier ein Dreyeck, welches ich B nennen will *). Die Höhe von A beträgt 4 und die Länge seiner Grundlinie 2 Zoll. B ist auch 4 Zoll hoch und seine Grundlinie mißt ebenfalls 4 Zoll. Nun sagt, welche von diesen beyden Figuren die größere ist. K. Unter diesen Umständen muß eine so groß als die andere seyn.

L. Wie lautet der Satz, nach dem ihr dieses behaupten könnt. K. Ein Dreyeck ist so groß ꝛc.

L. Gut! Nun will ich euch zeigen, daß diese zwey Figuren wirklich gleiche Flächenräume einnehmen. Wenn ich diese zwey kleinen Dreyecke hier wegnehme und sie hieher lege **), so wird dieser Flächenraum weder größer noch kleiner: nur seine Figur wird verändert, indem aus einem Dreyecke ein Parallelogramm wird. Jetzt lege ich das aus B entstandene Parallelogramm auf A und siehe! eine Figur deckt die andere, sie sind also beyde einander gleich.

Man

*) Man bilde hier mit Nro. 13. fig. 7. und 8. Tab. VIII.

**) Man mache hier aus dem Dreyecke B das Parallelogramm A.

Man kann den Satz, wovon hier die Rede ist, auch noch mit den Dreyecken Nro. 14. versinnlichen und bestätigen, indem man entweder zwey davon bald so an einander legt, daß sie einen Triangel bilden, bald so, daß sie ein recht- oder schiefwinklichtes Parallelogramm ausmachen; oder indem man alle acht erstlich so zusammensetzt, wie fig. 9. Tab. VIII. zeigt und dann aus diesem Parallelogramme das Dreyeck fig. 10. Tab. VIII. bildet.

Vierundvierzigster Satz a.

Aufgabe.

L. Jetzt betrachtet diese Figur (Fig. 48.) wieder, die wir vorhin (gestern) verzeichnet haben und sagt mir, wie sie nach und nach entstanden ist. K. Zuerst haben Sie das Dreyeck ABC verzeichnet, dann haben wir seine Grundlinie BC halbirt und aus dem Halbirungspuncte D bis an die gegenüberstehende Spitze die Linie AD gezogen, hierauf haben wir mit BD durch den Punct A die Linie EA, und dann mit DA die Linie BE parallel gezogen.

L. Nun will ich AB und AC weglöschen, so daß uns nur das Parallelogramm EABD übrig bleibt. — So! Wie verhält sich dieses Parallelogramm zu dem weggelöschten Dreyecke? K. Es ist ihm gleich.

L. Daher können wir sprechen: wir haben das vorhin verzeichnete Dreyeck in ein Parallelogramm ver-

verwandelt. Und ihr sehet hieraus, daß es möglich ist, ein gegebenes Dreyeck in ein Parallelogramm von gleicher Größe zu verwandeln. Um euch das hiebey nöthige Verfahren recht geläufig zu machen, sollt ihr jetzt ausgegebenen Dreyecken gleich große Parallelogramme machen. Carl soll zuerst dieß Geschäft verrichten, und August soll ihm vorsagen, was er thun soll. August. Verzeichne ein Dreyeck. (Carl verzeichnet.) August. Jetzt halbire die Grundlinie dieses Dreyecks u. s. w.

L. Nun merkt noch folgendes: Es ist, wenn dieses (Fig. 48.) Dreyeck in ein gleich großes Parallelogramm verwandelt werden soll, nicht gerade nöthig, daß die von D aus zu ziehende Linie gerade nach A gezogen werde; sie kann vielmehr nach jedem Puncte in der Linie EA gezogen und der Winkel D kann daher von jeder beliebigen Größe gemacht werden. So ist er z. B. hier (Fig. 49.) ein rechter.

L. Jetzt betrachtet diese Figur (Fig. 48.) noch Ein Mahl recht, überlegt alles genau, was wir dabey gelernt haben und sagt, ob ihr es wohl für möglich haltet, ein gegebenes Parallelogramm in ein gleich großes Dreyeck zu verwandeln. K. Das ist freylich möglich.

L. Nun sagt doch, was geschehen müßte, wenn uns das Parallelogramm EABD gegeben wäre und wir dasselbe in ein gleich großes Dreyeck verwandeln sollten. K. Da müßten wir erst die Grundlinie BD verlängern und das angesetzte Stück DC gerade so lang, als diese ist, machen;

hierauf müßten wir die Diagonale BA und dann die CA ziehen.

L. Das ist recht! Aber auch hier ist es nicht durchaus nöthig, daß die Linie BA gerade die Diagonale sey, sie kann z. B. wie hier (Fig. 49.) rechts über das Parallelogramm hinausfallen. Es bedarf weiter nichts, als daß das Dreyeck, worein ein Parallelogramm verwandelt werden soll, eine noch Ein Mahl so große Grundlinie habe und so hoch sey, als letztere Figur (das Parallelogr.) ist.

Nun lasse man die Kinder theils mit den nöthigen Werkzeugen, theils aus freyer Hand Dreyecke in Parallelogramme und umgekehrt verwandeln, und schreibe mitunter den Winkel vor, den die neu entstehende Figur haben soll. Es soll z. B. das Dreyeck ABC fig. 48. in ein Parallelogramm verwandelt werden, das einen Winkel hat, der so groß als der Winkel A (fig. 33.) ist. In diesem Falle wird die Linie BE (fig. 48.) so gestellt, daß sie mit BD einen Winkel macht, der dem gegebenen gleich ist.

Vierundvierzigster Satz b.

Lehrsatz.

L. Jetzt will ich wieder verschiedene Befehle geben und sehen, ob ihr sie alle pünctlich befolgen könnt. Jeder verzeichne sich ein Parallelogramm nach Belieben. K. (verzeichnen das Parallelogramm ACEG Tab. IX. Fig. 1.)

L. In

L. In diesem Parallelogramme ziehet eine Diagonale. K. (ziehen GC.)

L. Auf dieser Diagonale bemerkt, wo es euch beliebt, einen Punkt. K. (bemerken den Punct s.)

L. Durch diesen Punct zieht zwey Linien, wovon jede mit einer Seite des Parallelogramms parallel läuft, und sich durch das ganze Parallelogramm hinzieht, oder sich von einer Seite des Parallelogramms bis zur gegenüberstehenden erstreckt. K. (ziehen BF und HD.)

L. Nun merkt einen Satz, der sich zwar beweisen läßt, den ich aber der Kürze wegen hier nur ohne Beweis vortragen will. Zwey gerade Linien, die mit einer dritten parallel laufen, sind einander selbst parallel. Da wir nun in dieser Figur HD parallel mit GE gezogen haben, so muß auch HD mit AC parallel laufen. Denn HD und AC sind in diesem Falle zwey gerade Linien, welche mit einer dritten, nämlich mit GE parallel laufen und müssen also unter sich selbst parallel seyn. Gesetzt nun, BF wäre parallel mit AG, mit welcher andern Linie müßte da BF sonst noch parallel seyn? K. Mit CE.

L. Wie wollt ihr mir dieses beweisen? K. CE läuft parallel mit AG, weil dieß die gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogramms sind, wenn nun BF ebenfalls parallel mit AG gezogen worden wäre, so hätten wir in BF und CE zwey Linien, welche mit einer dritten parallel lie-

fen, und diese müßten daher auch selbst einander parallel seyn.

L. Gut! In dieser Figur habt ihr wirklich BF mit AG parallel gezogen, foglich muß sie auch mit CE parallel seyn. Jetzt beschreibt mir erst das ganze Verfahren, wodurch wir diese ganze Figur (Tab. IX. Fig. 1.) hervorgebracht haben, noch Ein Mahl. K. Erst haben wir ein Parallelogramm nach Belieben verzeichnet, dann haben wir darin eine Diagonale gezogen und auf derselben einen beliebigen Punct angenommen, hierauf ꝛc.

L. In wie viel Vierecke ist denn durch die Linien HD und BF das ganze Parallelogramm zerlegt worden? K. In vier.

L. Nennt mir sie. K. q und r, sodann HF und BD.

L. Wenn in jedem dieser vier Vierecke immer die zwey gegenüberstehenden Seiten gleichlaufend wären, wie müßte man diese Figuren nennen? K. Parallelogramme.

L. Forscht doch einmahl nach und seht, ob diese vier kleinen Vierecke Parallelogramme sind oder nicht. K. (thun dieß und finden, daß jedes der in Rede stehenden Vierecke ein Parallelogramm ist, wel in jedem derselben die gegenüberstehenden Seiten parallel sind.)

L. Zwey von diesen vier Parallelogrammen sind von den übrigen beyden dadurch unterschieden, daß sich eine gewisse Linie durch sie hinzieht: welche sind dieß? K. Die Parallelogramme HF u. BD.

L. Und

L. Und welche Linie zieht sich durch diese Parallelogramme? K. Die Diagonale.

L. Nun wißt ihr einen gewissen Umstand, wodurch sich die zwey Parallelogramme HF und BD von den übrigen beyden unterscheiden: gebt mir diesen an. K. Durch die Parallelogramme HF und BD zieht sich die Diagonale, durch q und r aber nicht.

L. Von den zwey kleinern Parallelogrammen, durch welche die Diagonale läuft, sagt man: sie liegen um die Diagonale. Diejenigen zwey aber, die nicht um die Diagonale liegen, oder durch die die Diagonale nicht läuft, nennt man die Ergänzungen der um die Diagonale befindlichen Parallelogramme. Jetzt nennt mir in dieser Figur die um die Diagonale des ganzen Parallelogramms AE befindlichen Parallelogramme. K. BD u. HF.

L. Nennt mir auch die Ergänzungen der um die Diagonale befindlichen Parallelogramme. K. q u. r.

L. Wie sich diese zwey Parallelogramme, nämlich q und r zu einander verhalten, das wollen wir jetzt untersuchen und uns dazu dieser Bretchen (Nro. 16), welche, wenn wir sie so zusammensetzen (erwähnte Stücke an einander legend, wie Fig. 1. Tab IX. zeigt), gerade unsere hier verzeichnete Figur darstellen *) Wenn ich diese Theile so aus einander rücke (mit Nro. 16. Fig. 13. Tab. IX. bil-

*) Man bezeichne die Stücke Nro. 16. gerade so, wie die ihnen entsprechenden Theile Fig. 1. Tab. IX.

bildend) und wir uns erstlich p, r und n, sodann o, q und m vereinigt denken, so haben wir — nun wie viel und was für Figuren? K. Zwey Dreyecke.

L. Könnt ihr mir wohl sagen, wie sich diese zwey Dreyecke zu einander verhalten? K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Aus welchem Grunde? K. Weil die Diagonale ein Parallelogramm in zwey gleiche und ähnliche Dreyecke theilt.

L. Richtig! Die drey Stücke p, r und n zusammen genommen sind also gerade so groß, als die drey Stücke o, q und m zusammen genommen. Nun will ich diese zwey Dreyecke (nämlich ACG und CEG) wieder so an einander legen wie sie vorhin lagen (Fig. 1. wieder bildend,) und ihr sagt mir, wie die beyden Dreyecke m und n (Fig. 1.) sich zu einander verhalten. K. Diese müssen auch einander gleich seyn.

L. Warum behauptet ihr dieß? K. Weil BD ein Parallelogramm ist, welches die Diagonale sC in 2 gleiche Dreyecke theilt.

L. Nun gebt Achtung! Der Triangel CEG (diese Figur etwas bey Seite rückend, daß wieder Fig. 13. entsteht) und der Triangel ACG sind gleiche Größen und eben so auch die Dreyecke m und n. Nun nehme ich m von der einen und n von der andern dieser 2 gleichen Größen weg (beyde Dreyecke wirklich wegnehmend), und ihr sagt mir geschwind, wie sich die Reste, nämlich r+p und o+q

zu

zu einander verhalten. K. Diese müssen einander gleich seyn.

L. Nach welchem Grundsatze könnt ihr dieses behaupten? K. Gleiches von Gleichem ꝛc.

L. Recht! Die zwey übrig gebliebenen Vierecke, nämlich r + p und o + q sind jetzt gleiche Größen. Nun sagt mir, wie sich das Dreyeck p zu dem Dreyecke o verhalten muß. K. Beyde müssen auch einander gleich seyn.

L. Warum denn? K. Weil sie aus einem Parallelogramme durch die Diagonale entstanden sind.

L. Recht! Nun will ich von der Größe p + r das Dreyeck p, und von der Größe o + q das Dreyeck o wegnehmen (beyde Dreyecke bey Seite legend), so daß uns die zwey Parallelogramme r und q übrig bleiben, und ihr sagt, wie sich diese zwey Reste jetzt zu einander verhalten. K. Diese müssen auch einander gleich seyn.

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht ꝛc.

L. Wir haben jetzt durch unser Nachdenken herausgebracht, daß diese zwey Parallelogramme (r und q) einander gleich seyn müssen, und daß dem so sey, bestätigt die Erfahrung. Denn wenn wir r auf q oder q auf r legen, so decken, wie ihr seht, beyde einander. Doch ist der Umstand, daß diese zwey Parallelogramme einander decken, hier nur zufällig, indem sie auch einander gleich seyn könnten, ohne gerade einerley Gestalt zu ha-

ben, wie z. B. in dieser Figur (etwa Fig. 3. Tab. IX. verzeichnend) der Fall ist.

L. Jetzt seht die hier verzeichnete Figur (Fig. 1.) wieder an und sagt mir, wie wir vorhin die beyden Parallelogramme r und q nannten. K. Die Ergänzungen der um die Diagonale liegen Parallelogramme.

L. Was wir hier in dieser Figur von den Ergänzungen der um ꝛc. erwiesen haben, das läßt sich in jedem Parallelogramme von den Ergänzungen der um die Diagonale befindlichen kleinern Parallelogramme erweisen, daher können wir den Lehrsatz aufstellen — nun wer drückt mir diesen gehörig aus? K. In jedem Parallelogramme sind die Ergänzungen der um die Diagonale befindlichen Parallelogramme von gleicher Größe.

L. Jetzt will ich sehen, wer mir diesen Lehrsatz durch Hülfe dieser Bretchen (Nro. 16.), sodann auch durch Hülfe dieser Figur (Fig. 1. Tab. IX.) beweisen kann. K. (beweisen.)

Bestätigen kann man diesen Lehrsatz 1) wenn man fig. 15. Tab. IX. verzeichnet, wo die beyden Ergänzungsparallelogramme in lauter gleiche Quadrate eingetheilt sind, und wo das eine dieser Parallelogramme so viel solcher Quadrate als das andere enthält; 2) wenn man mit Nro. 13. u. 18. die 12te und 14te Figur der 9ten Tafel bildet und dann in beyden Fällen die 4 Dreyecke, welche das eine Ergänzungsparallelogramm ausmachen, so zusammenlegt, daß sie in dem einen Fall ein Quadrat, in dem andern einen Rhombus bilden und jenes

dann

dann auf das andere Ergänzungsparallelogramm, nämlich auf A fig. 12., diesen auf B fig. 14. legt, wo man finden wird, daß sowohl die beyden Quadrate als die beyden Rhomben einander decken. Der Deutlichkeit wegen, kann man jedes der 4 kleinern Parallelogramme mit Stücken von besondern Farben bilden.

Wer es für dienlich findet, kann hier den Kindern noch zeigen, wie man folgende Probleme, die alle aus dem vorhergehenden Lehrsatze aufgelöst werden können, auflöst.

1) Aufgabe. Ein gegebenes Parellelogramm FDEG (Tab. IX. fig. 3.) in ein anderes zu verwandeln, welches eine gegebene oder angenommene Seite = QR fig. 2. haben soll.

Auflösung. Man verlängere FG und mache die Verlängerung GA = QR. Hierauf ziehe man aus A durch den Punct E die Linie AH, bis sie die hinlänglich verlängerte FD in H schneidet. Nun ziehe man aus A eine Linie AL von unbestimmter Länge parallel mit FH, sodann aus H eine andere parallel mit FA, bis sie die AL in I schneidet. Endlich verlängere man GE bis K, und DE bis B. Durch dieß Verfahren entsteht ein Parallelogramm EI, welches so groß ist, als das Parallelogramm FE und eine Seite hat, welche äqual QR ist.

Beweis. AFHI ist ein Parallelogramm, weil AI mit FH, und HI mit FA parallel gezogen worden sind. Die verlängerte DE, nämlich DB ist parallel mit der verlängerten FG, nämlich mit FA, weil FG und DE als gegenüberstehende Seiten eines Parallelogramms gleichlaufend sind, und die

die verlängerte GE, nämlich GK, muß aus dem nämlichen Grunde parallel mit FH laufen. Es sind folglich hier durch einen Punct E auf der Diagonale eines Parallelogramms 2 Linien durch das Parallelogramm gezogen, wovon jede mit einer Seite desselben parallel läuft, in welchem Falle nach dem vorher gehenden Lehrsatze die Ergänzungen der um die Diagonale liegenden Parallelogramme, hier also FE und EI gleich groß seyn müssen.

2) Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm ABCD (fig. 6. Tab. IX.) in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel a (fig. 5.) und eine gegebene Seite ab (fig. 4.) haben soll.

Auflösung. Erstlich wird auf die oben angegebene Art das Parallelogramm ABCD in das Parallelogramm EFDC, wo der Winkel EDC = dem Winkel a ist, verwandelt. Hierauf wird nach der Auflösung des vorhergehenden Problems (Nro. 1.) das Parallelogramm EFCD in das Parallelogramm CGHI verwandelt, wo denn die Seite CI oder GH = ab fig. 4. und der Winkel I = dem Winkel a fig. 5. ist.

Beweis. Daß das Parallelogramm xH = dem Parallelogramm EFCD seyn müsse, ist vorhin erst bewiesen worden. Daß der Winkel I dem Winkel EDC gleich sey, läßt sich folgender Massen beweisen: der Winkel EDC = dem Winkel DKI, weil DG und KH parallel laufen und EDC ein äußerer dem innern Winkel K entgegenstehender Winkel ist. Der Winkel CIH = dem Winkel DKI, weil KD und IC Parallelen sind, und

also

also der äußere Winkel I dem innern entgegenstehenden W. K gleich seyn muß. Es ist also

der Winkel EDC = DKI und

der Winkel CIH = DKI

folgl. Winkel CIH = dem Winkel EDC

Uibrigens kann man auch daraus, daß C + o und x als Vertikalwinkel einander gleich sind, beweisen, daß jeder der übrigen Winkel des Parallelogramms CH gleich seyn müsse einem gleichliegenden Winkel des Parallelogramms EFCD, welchen Beweis ich aber hier übergehe.

3) Aufgabe. Ein Dreyeck ABC (fig. 7. Tab. IX.) in ein Parallelogramm zu verwandeln, worin ein Winkel = dem Winkel A (fig. 10.) und eine Seite = mn fig. 9. seyn soll.

Auflösung. Auf die oben gezeigte Art wird das Dreyeck ABC fig. 7. in ein Par. mit dem verlangten Winkel verwandelt, so daß wir also das Parallelogramm DEFC erhalten. Alsdann verfährt man wie bey der Auflösung der ersten dieser Aufgaben und verfertigt das Parallelogramm u G, in welchem die Seite uX = mn (fig. 9.) und der Winkel X = dem Winkel EDC = dem Winkel A (fig. 10.) ist.

Der Beweis liegt in dem Vorhergehenden.

4) Aufgabe. Ein Viereck ABCD (fig. 8. Tab. IX.) in ein Parallelogramm zu verwandeln, das eine gegebene Seite mn (fig. 9.) und einen gegebenen Winkel A (fig. 10.) haben soll.

Auflösung. Man zerfälle das Viereck durch die Diagonale AC in 2 Dreyecke, verwandle nach der vor-

vorhergehenden Auflösung jedes derselben in ein Parallelogramm, das den gegebenen Winkel A und die gegebene Seite mn enthält, wodurch zwey Parallelogramme entstehen, wovon das eine eine Seite und einen Winkel so groß hat, als eine Seite und ein Winkel im andern ist, unter welchen Bedingungen sie dann, wie fig. 11. Tab. IX. zeigt, an einander gesetzt und zu einem einzigen Parallelogramme vereinigt werden können, welches so groß als das Viereck ABCD seyn muß.

Beweis. Daß die beyden Parallelogramme K und L (fig. 11.), wenn sie nach der Auflösung der vorhergehenden dritten Aufgabe aus den Dreyecken ABC und ADC gemacht worden sind, zusammengenommen so groß seyn müssen, als diese 2 Dreyecke, folglich auch als das Viereck ABCD, ist aus dem Vorhergehenden klar. Daß sie aber gehörig an einander gesetzt ein einziges Parallelogramm ausmachen, läßt sich folgender Massen beweisen: Das Parallelogramm uG fig. 7. sey das nämliche, welches in der 11ten Figur mit K bezeichnet ist, der Winkel X in uG sey gleich dem Winkel r in dem Parallelogramm L fig. 11. und die Seite Xu in uG sey so groß als die Seite zy in L. Wenn wir nun die Seite rq in dem Parallelogramm L nach p verlängern, so muß der dadurch entgegenstehende äußere Winkel x so groß als der Winkel r seyn, weil mr und nq Parallelen sind. Da nun der Winkel X in dem Parallelogramm uG so groß als der Winkel r in dem Parallelogramm L ist, so muß auch der Winkel X so groß als der äußere entgegenstehende Winkel x seyn. Gleiche Winkel decken aber einander, folglich muß der Winkel X,

wenn

wenn er gehörig auf x gelegt wird, diesen decken, die Seite XG von dem Parallelogramm uG muß daher auf die Verlängerung von rq fallen, muß folglich mit der rq eine einzige gerade Linie ausmachen. Ist ferner die Seite Xu von dem Parallelogramm uG so groß als die Seite yz in dem Parallelogramm L, so muß beym gehörigen Aneinanderlegen der Parallelogramme der Punct u gerade auf den Punct n, und die Seite uL gerade auf no, also auf die Verlängerung von mn fallen, weil der Winkel u in dem Parallelogramm uG auch dem Winkel m in dem Parallelogramm L, daher auch seinem äußern ihm entgegenstehenden Winkel w gleich seyn muß. Da nun rq und mn (fig. 11.) parallel sind, so müssen auch beyde verlängerte Linien, nämlich mo und rp, parallel seyn, und da ferner mr mit nq und op mit nq parallel ist, so müssen mr und op ebenfalls parallel, die Figur mopr aber muß ein Parallelogramm seyn.

Zusatz. Weil sich jede vielseitige Figur durch Diagonalen in Dreyecke zerfällen läßt; so läßt sich auch jedes Vieleck auf ähnliche Bedingungen in ein Parallelogramm verwandeln. Denn man macht aus den Dreyecken dergleichen Parallelogramme und schiebt sie mit den gleichen Seiten gehörig an einander.

L. Nun will ich einmahl sehen, ob ihr von mehrern Sätzen, die ich euch bisher bekannt gemacht habe, Anwendung machen und theils gewisse Fragen darnach beantworten, theils gewisse Behauptungen beurtheilen könnt. Ich gebe einem Schreiner den Auf-

Auftrag, mir einen dreyeckigten Tisch zu machen, der gerade so groß sey*), als dieser hier (auf einen Tisch zeigend, der als Fläche betrachtet ein Parallelogramm ist: wie muß er dieses anfangen. K. Da muß er eine Seite dieses Tisches (Tischblattes) zur Grundlinie annehmen und sie messen, hierauf muß er von der angenommenen Grundlinie zur entgegengesetzten Seite eine senkrechte Linie ziehen und diese auch messen. Nun muß er die Grundlinie doppelt nehmen und über dieselbe ein Dreyeck beschreiben, welches so hoch als die zuletzt gemessene senkrechte Linie ist.

L. Recht! so müßte der Schreiner verfahren. Nun soll Carl der Schreiner seyn und mir hieher in die Stube ein Dreyeck verzeichnen, welches mit diesem Tische einerley Größe hat. K. (thut dieß.)

L. Nun sagt mir, wie ein Gärtner verfahren müßte, wenn er in einem Garten ein dreyeckigtes Stück Land abstecken wollte, das gerade so groß als diese Stube wäre? K. (geben das Verfahren an.) — —

L. Ich habe ein Stück Tuch, das die Figur eines Dreyecks hat. Die Grundlinie dieses Dreyecks mißt 2 Ellen und seine Höhe 3 Ellen. August hat ebenfalls ein Stück Tuch in Form eines Parallelogramms. Die Grundlinie dieses Parallelogramms hält Eine, die Höhe desselben aber 3 Ellen. Nun be-

*) Im gemeinen Leben denkt gewiß jeder bey der Größe eines Tisches an den obersten Flächenraum des Tischblattes.

behaupte ich: August hat weniger Tuch als ich. K. Nein, das ist nicht so.

L. Warum wollt ihr mir nicht Recht geben? K. Weil ꝛc.

L. Ein rechter Winkel ist größer als ein spitziger. K. Richtig.

L. Also ist ein rechtwinklichtes parallelogramm größer als eins das zwey spitzige Winkel hat. K. Diese Behauptung kann wahr und falsch seyn, nur kommt es hiebey nicht auf die Winkel sondern auf die Höhe und Grundlinie des letztern Parallelogramms an. Hätte es mit dem rechtwinklichten gleiche Grundlinie und Höhe, so wäre es ihm gleich u. s. w.

L. Parallelogramme, die zwischen einerley Parallelen stehen, müssen immer einander gleich seyn. K. Wenn sie nicht auch gleiche Grundlinien haben, so müssen sie nicht grade gleich groß seyn.

L. Lotte hat ein Stück Tuch in Form eines Dreyecks und Julie hat eins in Form eines Parallelogramms. Da nun ein Dreyeck halb so groß als ein Parallelogramm ist, so behaupte ich: Julie hat noch Ein Mahl so viel Tuch als Lotte. K. Diese Behauptung ist nur wahr, wenn ꝛc.

L. Weil diese Dreyecke (Fig. 50. verzeichnend) einander gar nicht ähnlich sind, so können sie auch nicht einerley Größe haben. K. Das können sie wohl, so bald nur ihre Höhen und Grundlinien gleich groß sind.

L. Und dieser Fall findet hier wirklich Statt, derohalben — ? K. Sind sie alle gleich groß.

L. In gleich großen Parallelogrammen müssen die Winkel einzeln genommen einander gleich seyn. K. Das ist keine Folge.

L. Zwey Parallelogramme, die eine gemeinschaftliche Grundlinie haben, müssen einander gleich seyn. K. Wenn sie nicht auch zugleich einerley Höhe haben, so ꝛc.

L. Wenn ich ein Dreyeck in ein gleich großes Rechteck verwandeln soll, so muß mir ein Winkel der an der Grundlinie des Rechtecks liegen soll, gegeben werden. K. Es ist ja nicht nöthig, daß ein Winkel gegeben werde, da ein Rechteck keine andern als rechte Winkel haben kann.

Fünfundvierzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Ich habe hier (Tab. III. Fig. 51.) zwey gleiche Linien AB und CD verzeichnet. Ueber jede derselben soll Carl ein Quadrat beschreiben, und Emmerich soll ihm das hiebey zu beobachtende Verfahren vorsagen. K. (thun das Befohlne.)

L. Welche Linie dürfte ich nur messen, wenn ich die Höhe des Quadrats ABFE erfahren wollte? K. EA oder FB.

L. Richtig! Denn in einem rechtwinklichten Parallelogramme zeigt ja eine seiner Seiten, die auf der Grundlinie stehen, auch seine Höhe an. Wie verhält sich aber die Seite EA zu AB? K. Beyde

de sind einander gleich, weil in einem Quadrate alle Seiten einander gleich seyn müssen.

L. Wie muß sich sonach die Höhe eines Quadrats zu seiner Grundlinie verhalten? K. Beyde müssen einander gleich seyn.

L. Richtig! Wenn ich also die Grundlinie eines Quadrats weiß, so weiß ich auch —? K. Seine Höhe.

L. Wenn nun zwey Quadrate gleiche Grundlinien haben, können da ihre Höhen verschieden seyn? K. Nein.

L. Nun! da könnt ihr mir ja wohl sagen, welches von diesen zwey Quadraten (Fig. 51.) das höhere ist. K. Eins ist so hoch als das andere.

L. Woher wißt ihr dieses? K. Weil sie gleiche Grundlinien haben und die Grundlinie eines Quadrats zugleich seine Höhe anzeigt.

L. Wie mögen sich nun diese beyden Quadrate in Ansehung ihrer Größe zu einander verhalten? K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Nach welchem unserer kürzlich gelernten Sätze könnt ihr dieses behaupten? K. Parallelogramme, die gleiche Grundlinien und Höhen haben, sind rc.

L. Nun haben wir herausgebracht, daß diese zwey Quadrate einander gleich sind, ohne daß wir Anfangs mehr von ihnen wußten, als —? K. Daß sie gleiche Grundlinien haben.

L. Oder daß eine Seite in dem einen so groß ist, als eine Seite in dem andern. Denn da die Seiten in einem Quadrate alle einander gleich sind, so

können wir statt der Grundlinie jede andere Seite denken. Hieraus seht ihr, daß wir für eine besondere Art von Parallelogrammen, nämlich für Quadrate, noch ein besonderes Merkmahl haben, woran wir erkennen können, daß zwey dieser Figuren einander gleich sind. Worin besteht dieses Merkmahl? K. Darin, daß in dem einen Quadrate eine Seite so groß ist, als in dem andern.

L. Wie wollt ihr das, was wir jetzt gelernt haben, als einen Lehrsatz ausdrücken. K. Zwey Quadrate sind einander gleich, wenn in dem einen eine Seite so groß ist, als eine Seite in dem andern.

L. Gesetzt nun, ich wüßte von zwey Quadraten, daß in jedem eine Seite von 3 Zoll vorhanden wäre, was könnte ich denn von diesen beyden Figuren behaupten? K. Daß sie rc.

L. Und wenn ich auf dieser Linie (eine verzeichnend) sechs gleich große Stücke abschnitte und über jedes ein Quadrat beschriebe, wie würden sich diese Quadrate alle zu einander verhalten? K. Sie würden alle einander gleich seyn.

L. Nun verzeichne mir jeder 6 rc. Quadrate, die alle von einerley Größe sind. K. (verzeichnen.)

Man gebe den Kindern hier den Auftrag, nicht allein auf Horizontal- sondern auch auf Vertical- und Schräglinien Quadrate zu verzeichnen.

Sechsundvierzigster Satz.

Lehrsatz.

L. Was für eine Figur entsteht wohl, wenn ich auf einen Endpunkt einer geraden Linie eine andere senkrecht stelle, und dann die übrigen beyden Endpuncte dieser zwey Linien durch eine dritte verbinde? K. Ein Dreyeck.

L. Aber was für eine Art von Dreyecken? K. Ein rechtwinklichtes.

L. Gut! Carl verzeichne ein solches Dreyeck. K. (verzeichnet ABC Fig. 52.)

L. Jetzt will ich euch ein paar neue Namen sagen und sehen, wer sie und ihre Bedeutungen merken kann. Diejenige Seite eines rechtwinklichten Dreyecks, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, heißt die Hypotenuse, und diejenigen zwey Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, nennt man die beyden Katheten. Jetzt sagt mir, mit welchen Buchstaben hier die Hypotenuse bezeichnet ist. K. Mit AC.

L. Wie wird die Seite AC hier in diesem Triangel genannt? K. Hypotenuse.

L. Bey welcher Art von Dreyecken kann dieser Name nur gebraucht werden? K. Bey den rechtwinklichten.

L. Und was bezeichnet man damit? K. Diejenige Seite rc.

L. Könnt ihr mir denn auch sagen, mit welchen Buchstaben hier die Katheten bezeichnet sind? —

Was versteht man unter diesem Worte? — — Jetzt soll August ein Quadrat auf den Katheten BC verzeichnen, d. h. er soll ein Quadrat verzeichnen und BC zu einer Seite desselben machen. K. (verzeichnet BCDE.)

L. Wer kann mir sagen, was August erst gethan hat? K. Er hat auf den Katheten BC des Dreyecks ABC ꝛc.

L. Nun soll Theodor auf den Katheten AB auch ein Quadrat verzeichnen. K. (verzeichnet FAGB).

L. Wer sagt mir, was Theodor erst gethan hat? K. Er hat ꝛc.

L. Jetzt soll auch Fritz auf die Hypotenuse ein Quadrat verzeichnen. K. (verzeichnet.)

L. Wenn ich jemanden bekannt machen wollte, was wir jetzt für eine Figur verzeichnet haben, und deßhalb spräche: wir haben ein Dreyeck und drey Quadrate verzeichnet, müßte er sich bey diesen Worten gerade diese Figur hier denken? K. Nein.

L. Was könnte er sich denn wohl ausser dieser Figur noch bey diesen Worten denken? K. Ein spitz- oder stumpfwinklichtes Dreyeck und drey von diesem Dreyecke ganz abgesonderte Quadrate.

L. Wie müßte ich mich wohl ausdrücken, damit derjenige, welcher meine Worte hörte, gar nichts anders, als diese Figur (Fig. 52. ohne Hülfslinien) denken könnte? K. Wir haben ein rechtw. Dreyeck und auf jede Seite desselben ein Quadrat verzeichnet.

L. Richtig! So hätte ich mich bestimmt ausgedrückt. — Nun gebt recht Achtung, wir wollen

jetzt

jetzt die auf den Seiten dieses Dreyecks verzeichneten Quadrate zum Gegenstande unserer Nachforschungen machen, indem wir untersuchen wollen, wie sich die zwey kleinern zusammengenommen zu dem größern, oder: wie sich die Quadrate der beyden Katheten zu dem Quadrate der Hypotenuse verhalten. Diese Untersuchung können wir aber ohne Hülfslinien nicht anstellen, daher müssen wir nach der ersten unserer Regel verschiedene Puncte durch gerade Linien verbinden. Carl soll dieß thun. Die erste Linie soll er aus der Spitze des rechten Winkels unseres Dreyecks durch die Hypotenuse bis zur gegenüberstehenden Seite ihres Quadrats und zwar parallel mit AI oder CH ziehen. (Carl zieht nach dieser Angabe BK. Kann er dieses nicht gleich, so wiederhohle man diese Angabe, zeige aber nicht mit der Hand, von wo an, und wohin er die Linie ziehen soll, damit er genöthigt werde, sich den Sinn der Angabe deutlich zu denken.)

L. Das ist recht! Jetzt will ich diese Linie wieder weglöschen und August soll Carln mit den Worten, die ich vorhin gebraucht habe, den Auftrag geben sie noch Ein Mahl zu ziehen. August. Ziehe aus der Spitze ꝛc. (Carl zieht.)

L. Aus einem Puncte kann man, wie ihr wißt, so viel Linien ziehen als man will, daher können wir aus dem Puncte B oder aus der Spitze des rechten Winkels noch mehr Linien ziehen. Und da uns wirklich noch einige Puncte in dem Quadrate der Hypotenuse gegeben sind, die wir mit B verbinden können, so wollen wir diese Verbindung auch Statt

 finden

finden lassen. Nur will ich sehn, ob ihr die gegebenen Puncte, die wir mit dem Puncte B durch gerade Linien verbinden können, zu finden im Stande seyd. K. (suchen und kommen bisweilen auf die Puncte I und H.)

L. Richtig! I und H sind gegebene Puncte, da ja in jedem derselben zwey Linien zusammenstoßen. Wie wolltet ihr euch nun ausdrücken, wenn ihr diese Puncte ihrer Lage nach bestimmen und nicht mit Buchstaben benennen wolltet? K. —

L. In welcher Figur liegen denn diese Puncte? K. In einem Quadrate.

L. Da wir hier drey Quadrate haben, so müßt ihr das Quadrat hier (ACIH) näher, aber nicht durch Hülfe der Buchstaben bestimmen Wer kann dieß thun? Bedenkt nur auf welcher Linie es steht. K. Es ist das Quadrat der Hypotenuse.

L. Freylich. Diese Puncte liegen also im Quadrate der Hypotenuse und sind die Scheitel zweyer Winkel desselben. Welchem gegebenen Winkel liegen wohl die zwey Winkel I und H gegen über? K. Dem rechten Winkel des gegebenen Dreyecks.

L. Nun versucht die rechten Ausdrücke zu finden, mit denen ihr jemanden zu erkennen geben könnt, daß er von hier (auf den Punct B zeigend) bis hieher (auf H zeigend) und hieher (auf I zeigend) gerade Linien ziehen soll. K. Ziehe aus der Spitze des rechten Winkels des gegebenen Dreyecks in

in die Spitzen der gegenüberstehenden Winkel des Quadrats der Hypotenuse gerade Linien.

L. Diese Ausdrücke wären richtig, und jeder wird, wenn er diesen Befehl gehörig befolgt, diese Linien (BH und BI ziehend) ziehen. Nun seht, ob ihr in unserm Dreyecke nicht noch ein Paar Puncte finden könnt, von denen man nach andern in den Quadraten der Katheten gegebenen Puncten gerade Linien ziehen kann. K. Von A könnte man nach E, und von C nach F gerade Linien ziehen.

L. Recht! Wenn ihr bedenkt, daß A und C die spitzigen Winkel des gegebenen Dreyecks und E und F die diesen Winkeln gegenüberstehenden Winkel der Quadrate der kleinern Seiten sind, so werdet ihr mir sagen können, wie ich ohne Buchstaben zu nennen, sprechen muß, wenn ich haben will, daß Carl von diesen Puncten (auf A und C zeigend) zu diesen (auf E und F zeigend) gerade Linien ziehe. K. Da müssen Sie sagen: ziehe aus jedem der spitzigen Winkel des gegebenen Dreyecks eine gerade Linie in den gegenüberstehenden Winkel eines Quadrats einer kleinern Seite (eines Katheten).

L. Gut! Nun Carl, so ziehe denn aus jedem der spitzigen Winkel unsers gegebenen Dreyecks in den ihm gegenüberstehenden Winkel eines Quadrats einer kleinern Seite eine grade Linie. K. (zieht AE und CF).

L. Recht so! Jetzt haben wir alle zu unserer Untersuchung nöthigen Hülfslinien. Da ihrer aber so viele sind, und sie sich einander so durchkreuzen (schneiden), daß ihr leicht irre werden könntet, wir

auch überdieß nicht alle auf Ein Mahl nöthig haben, so will ich einige derselben wieder weglöschen (BI, BH, AE und CF weglöschend). — So! Jetzt sagt mir, in wie viel Theile das Quadrat der Hypotenuse durch die Linie BK getheilt wird. K. In zwey.

L. Was für eine Art von Figuren ist jeder? K. Ein Rechteck oder Oblong.

L. In einer solchen Figur müssen die gegenüberstehenden Seiten parallel seyn. Ist dieß der Fall bey der Figur KHCL. K. Ja.

L. Wie wollt ihr mich hievon überzeugen? K. Die Seiten KH und LC sind parallel, weil es Theile von den Seiten eines Quadrats sind und BK haben wir ja mit CH parallel gezogen.

L. Richtig! Bey dieser Gelegenheit merkt, was sich zwar auch beweisen läßt, was ich aber der Kürzwegen nicht gethan habe, daß eine Linie, die mit einer von zwey Parallelen gleichlaufend ist, es auch mit der andern seyn muß, daher muß auch LK mit AI parallel laufen, und da auch IK und AL Theile von Parallelen sind, so muß auch IKAL ein Parallelogramm seyn. Der Kürze wegen will ich das eine dieser Parallelogramme M und das andere N, desgleichen das eine der kleinern Quadrate hier O, und das andere P nennen (diese Buchstaben wie Fig. 1. Tab. V. zeigt hinsetzend). Jetzt sagt mir, welches von den zwey kleinen Quadraten dem Parallelogramme N am nächsten liegt. K. Das Quadrat P.

L. Und

L. Und welches Quadrat liegt dem Parallelogramm M am nächsten? K. Das Quadrat O.

L. Nun wollen wir jedes dieser zwey Parallelogramme (auf M und N zeigend) mit einem dieser Quadrate (O und P zeigend) und zwar mit demjenigen, das ihm am nächsten liegt, vergleichen, und das Verhältniß, in welchem N u. P, dann O und M zu einander stehen, zu erforschen suchen. Den Anfang wollen wir mit dem Parallelogramme N und dem Quadrate P machen, und deßhalb die vorhin weggelöschte Linie BH wieder ziehen. — (Nun steht Fig. 1. Tab. V. an der Tafel.) Jetzt sagt mir, was der Flächenraum, den die Linien BH, HC und CB einschließen für eine Figur ist *). K. Ein Dreyeck.

L. Dieses Dreyeck will ich nebst dem Parallelogramm LKCH besonders verzeichnen und die Linie CH zur Grundlinie machen, damit ihr beyde Figuren besser übersehen könnt. (Man verzeichne hier Tab. V. Fig. 2.) — So! Nun zeigt mir in dieser Figur (Fig. 2.) alle Theile, die hier (Fig. 1.) auch verzeichnet sind. K. Hier (Fig. 2.) ist die Linie CH, die in dieser Figur (Fig. 1.) hier liegt u. s. w.

L. Jetzt sagt mir, ob ihr nicht wißt, wie sich dieses Dreyeck hier (BHC Fig. 2. Tab. V. zeigend) zu dem Parallelogramme LKCH verhalten muß.

K. Das

*) Der Deutlichkeit wegen kann man die Stücke von den Linien AC und AE, die in dem Dreyecke BHC liegen, weglöschen.

K. Das Dreyeck muß gerade halb so groß als das Parallelogramm seyn.

L. Aus welchem Grunde könnt ihr denn dieses behaupten? K. Weil das Dreyeck BHC mit dem Parallelogramme LKCH einerley Grundlinie und gleiche Höhe hat.

L. Wie wißt ihr denn, daß beyde Figuren gleiche Höhe haben? K. Sie stehen ja beyde zwischen einerley Parallelen.

L. Richtig! Da nun diese Figuren hier (auf BHC und LKHC Fig. 1. zeigend) die nämlichen sind, die hier (Fig. 2.) besonders nur in einer etwas veränderten Lage verzeichnet stehen, so müssen wir natürlich behaupten, daß das Dreyeck BHC —? K. Die Hälfte von dem Parallelogramme LKHC (N) sey.

L. Richtig! Diesen Umstand merkt recht. Jetzt will ich von A nach E wieder eine gerade Linie ziehen und dadurch mit AC und CE wieder ein besonderes Dreyeck bilden, welches ich nebst dem Quadrate P ebenfalls hier besonders, aber so herumgedreht *), verzeichnen will. (Hier wird Fig. 4. Tab. V. verzeichnet.) — Zeigt mir nun in dieser Figur hier (auf Fig. 4. zeigend) diese Seite da (auf EC Fig. 1. zeigend.) K. (zeigen EC in

*) Man drehe hier Tab. V., die man etwa auf Pappe kleben und zugleich mit an die schwarze Tafel aufhängen kann, so herum, daß CE aus der verticalen in die horizontale Lage komme.

in Fig. 4.) Jetzt zeigt mir doch auch diese Seite hier (auf DA Fig. 4. zeigend) hier in dieser Figur (Fig. 1.) K. (zeigen.)

L. Könnt ihr mir denn nicht sagen, ob mit der Linie DA hier in dieser Figur (Fig. 1.) eine andere parallel läuft oder nicht. K. Ja, EC läuft mit ihr parallel.

L. Woher kann man denn dieses wissen? K. Daher, weil BCED ein Parallelogramm ist, wo also die gegenüberstehenden Seiten parallel sind, und BA als Verlängerung von BD angesehen werden kann *).

L. Richtig! Es sind also auch hier in dieser Figur (Fig. 4.) DA und EC parallel. Da ihr dieses wißt, so könnt ihr mir gewiß sagen, wie sich hier (Fig. 4.) das Dreyeck EAC zu dem Quadrate oder Parallelogramme DBCE verhalten muß. K. Es (das Dreyeck) muß die Hälfte von ihm (dem Quadrate) seyn.

L. Aus welchem Grunde könnt ihr denn dieses behaupten? K. Weil beyde Figuren einerley Grundlinie und gleiche Höhe haben.

L. Was ihr jetzt von diesem Dreyecke und Parallelogramm hier (Fig. 4.) behauptet habt, das gilt

*) Genau genommen müßte erst noch erwiesen werden, daß DB und BA fig. 1. eine einzige gerade Linie ausmachen. Bey Anfängern glaubte ich diesen Beweis übergehen zu dürfen.

gilt ebenfalls auch von diesen zwey Figuren hier (auf das Dreyeck ACE und das Parallelogramm P Fig. 1. zeigend), da es die nämlichen Figuren sind, die hier Fig. 4.) abgesondert und in einer veränderten Lage verzeichnet sind. Wir wissen demnach, daß das Dreyeck BHC (Fig. 1.) halb so groß als das Parallelogramm N, und das Dreyeck ACE halb so groß als das Quadrat P ist. Gesetzt nun, wir könnten herausbringen, daß diese zwey Dreyecke, nämlich BHC und ACE (Fig. 1.) einander gleich wären, was könnten wir alsdann von dem Quadrate P und dem Rechtecke N behaupten? K. Daß auch diese zwey Figuren einander gleich seyn müßten, da die Ganzen einander gleich sind, sobald ihre Hälften einerley Größe haben.

L. Nun wollen wir doch sehen, ob wir nicht eins von den drey Merkmahlen der Gleichheit und Aehnlichkeit zweyer Dreyecke hier an diesen zwey Dreyecken BHC und EAC auffinden können. Der leichtern Uebersicht wegen, will ich aber erst das Dreyeck ACE, welches hier in dieser Figur (Fig. 1.) gegen das Dreyeck BHC diese Lage hat (die zwey Dreyecke Nro. 11. gerade so aneinander haltend, wie in Fig. 1. BHC und HCE gegen einander liegen) so herumgedreht verzeichnen (das eine Dreyeck Nro. 11., welches die Lage von ACE hat, herumdrehend, daß es die Lage von Fig. 3. Tab. V. bekommt und dann die erst erwähnte Figur verzeichnend.) — So! Nun sagt mir, ob ihr noch wißt, welches das erste Merkmahl der Gleichheit und Aehnlichkeit zweyer Dreyecke

ecke war, das ich euch bekannt machte? K. Ja. Wenn zwey Seiten mit dem dazwischen liegenden Winkel in dem einen ꝛc.

L. Wir wollen doch einmahl nachforschen und sehen, ob wir dieses Merkmahl hier nicht entdecken können. Wenn wir hier (Fig. 1. Tab. V.) in dem Dreyecke BHC die Seite CH betrachten, so finden wir, daß sie noch von zwey andern Figuren eine Seite ist: von welchen? K. Von dem Rechtecke N und von dem Quadrate der Hypotenuse (AIHC).

L. Gut! Wir wollen jetzt die Seite CH nur zugleich als Seite dieses Quadrats betrachten. Nun seht auf die Seite AC in dem Dreyecke AEC und sagt von welcher andern Figur diese Seite zugleich auch noch eine Seite ist. K. Ebenfalls von dem Quadrate der Hypotenuse.

L. Wie müssen sich demnach diese zwey Seiten zu einander verhalten? K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Aus welchem Grunde könnt ihr dieses behaupten? K. Weil es Seiten eines Quadrats sind.

L. Richtig! Nun wollen wir diese zwey gleichen Seiten in diesen zwey Dreyecken Fig. 2. u. 3. mit einem besondern Zeichen bemerken. — So!

L. Jetzt sagt, von welcher andern Figur die Seite BC in dem Triangel BHC zugleich eine Seite ist. K. Von dem Quadrate P.

L. Und

L. Und von welcher andern Figur ist die Seite CE vom Dreyecke ACE zugleich eine Seite? K. Auch von dem Quadrate P.

L. Wie muß sich also die Seite BC in diesem Dreyecke (zeigend) zur Seite CE in diesem andern Dreyecke hier (zeigend) verhalten? K. Sie muß ihr gleich seyn.

L. Warum? K. Weil diese beyden Dreyecks-Seiten auch Seiten eines Quadrats sind.

L. Recht! Nun wollen wir auch in diesen zwey Dreyecken (Fig. 2. und 3.) die Seiten BC und EC ebenfalls als gleiche Seiten bezeichnen. — Jetzt sagt, was wir nur noch zu wissen brauchten, um von der Gleichheit und Aehnlichkeit dieser zwey Dreyecke (Fig. 2. und 3. zeigend) überzeugt seyn zu können. K. Daß die Winkel zwischen den zwey gleichen Seiten gleich wären.

L. Wir wollen sehen, ob dieß nicht der Fall ist. Was ist denn der Winkel m hier (Fig. 1.) für ein Winkel? K. Ein rechter.

L. Und der Winkel o (Fig. 1.)? K. Auch ein rechter.

L. Woher wißt ihr denn, daß diese zwey Winkel rechte Winkel sind? K. Weil es Winkel zweyer Quadrate sind.

L. Und wie verhalten sich denn alle rechte Winkel zu einander? K. Sie sind einander gleich.

L. Da

L. Da ist also hier (Fig. 1.) der Winkel m, so groß als der Winkel o. Wenn ich nun erstlich n zu m, und dann n zu o addire, wie werden sich dann beyde Summen zu einander verhalten? K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Nach welchem Grundsatze behauptet ihr dieses? K. Nach dem: Gleiches zu ꝛc.

L. Nun will ich hier (Fig. 1.) von der Seite AC ein Stück weglöschen, dadurch den Winkel n mit m vereinigen und diesen neu entstandenen Winkel Cm nennen. Das Nämliche will ich auch hier (Fig. 2.) thun, wo dann der aus n und m entstandene Winkel C heißen soll. Gesetzt nun, der zu m addirte Winkel hätte 60 Grad gehabt, wie viel müßte nun der Winkel C hier (Fig. 2.) betragen? K. 150 Grad.

L. Wie rechnet ihr hier? K. Der rechte Winkel m hatte 90 Grad, und wenn n 60 hätte, so ꝛc.

L. Nun will ich das weggelöschte Stück von AC wieder verzeichnen und dagegen (Fig. 1.) ein Stückchen von BC weglöschen, um dadurch die die Winkel n und o mit einander zu vereinigen, und diesen neuen Winkel hier (Fig. 1.) Co und hier (Fig. 3.) auch nur C nennen, wie in dieser Figur (Fig. 2.). Wie viel Grad muß nun jetzt Co halten, da wir vorhin annahmen, daß n 60 Grad habe. K. Auch 150 Grad.

L. Nun da haben wir ja herausgebracht, daß diese zwey Winkel (auf c in Fig. 2. u. 3. zeigend) einander gleich sind, welches wir durch einen Bo-

gen den ich da und daher (Fig. 2. u. 3.) mache, anzeigen wollen. Jetzt betrachtet diese zwey Dreyecke hier (HBC und AEC Fig. 1.) noch Ein Mahl und sagt, welche Stücke in dem einen so groß als in dem andern sind. K. In dem einen sind zwey Seiten und der dazwischen liegende Winkel so groß, als in dem andern.

L. Und daraus folgt? K. Daß sie einander gleich und ähnlich seyn müssen.

L. Und was folgt aus dem Umstande, daß diese zwey Triangel (zeigend), als die Hälften dieser Parallelogramme (zeigend), einander gleich sind? K. Daß auch die ganzen Parallelogramme einander gleich seyn müssen.

L. Freylich! Das Quadrat P ist demnach gerade so groß als das Rechteck N. Nun will ich sehen, wer mir den Beweis für die Wahrheit dieses Satzes recht ordentlich wiederholen kann.

Die Kinder wiederhohlen nun mit Beyhülfe des Lehrers den vorhin geführten Beweis, bis er ihnen recht geläufig ist und in demselben keine Dunkelheit mehr für sie obwaltet. Bey der zweyten und dritten Wiederhohlung wurde öfters meinen Schülern alles so licht und klar, daß sie sich wunderten, wie ihnen das erste Mahl nur einige Dunkelheit habe übrig bleiben können.

L. (welcher Tab. III. Fig. 52. ohne die BH und AE an die schwarze Tafel verzeichnet hat.) Heute wollen wir das Quadrat O mit dem Rechtecke M vergleichen und sehen, wie sich diese beyden Figuren

guren zu einander verhalten. Um diese Vergleichung anstellen zu können brauchen wir die Hülfslinien BI und CF, die ich deshalb gezogen habe. Nun forscht nach und seht, ob wir nicht auch hier, wie bey der letzten Untersuchung, ein Paar Dreyecke finden, wovon jedes mit einem Parallelogramme einerley Grundlinie und gleiche Höhe hat. K. Ey ja. Das Dreyeck AFC hat mit dem Quadrate O die Grundlinie FA gemein und liegt mit ihm zwischen einerley Parallelen, und das Dreyeck AIB hat mit dem Parallelogramm M die Grundlinie AI gemein und liegt mit ihm ebenfalls zwischen einerley Parallelen.

L. Wie muß sich demnach das Dreyeck AFC zu dem Quadrate O verhalten? K. Es muß halb so groß als dieses Quadrat seyn.

L. Und wie muß sich der Triangel AIB zu dem Parallelogramme M verhalten? K. Er muß halb so groß als dieses seyn.

L. Richtig! Nun forscht nach und seht, ob ihr an diesen zwey Dreyecken nicht auch ein Merkmahl der Gleichheit und Aehnlichkeit entdecken könnt.

Die Kinder finden, durch die Uibereinstimmung des vorhergehenden Falles mit dem vorliegenden hiezu in den Stand gesetzt, öfters für sich, daß AI in dem $\triangleleft$ AIB = AC in dem $\triangleleft$ ACF und AB in dem $\triangleleft$ AIB = FA in dem $\triangleleft$ ACF: ferner: daß der Winkel o = m, folglich m + n = o + n und daher $\triangleright$ AIB $\cong$ $\triangleleft$ ACF. Sollten sie aber für sich selbst diese Merkmahle der Gleichheit und Aehnlichkeit der zwey erwähnten Dreyecke nicht finden, so werden

sie ganz wie in dem vorhergehenden Falle darauf hingeleitet, wobey man auch die zu vergleichenden Dreyecke wieder einzeln verzeichnen kann.

L. Da ihr nun wißt, daß diese zwey Dreyecke (zeigend) einander gleich sind, so wißt ihr auch, wie sich das Quadrart O zu dem Parallelogramme M verhält. Wer sagt mir, wie sich beyde Figuren zu einander verhalten? K. Sie müssen einander gleich seyn, weil ihre Hälften gleich groß sind.

L. Da haben wir also 1) an dem Quadrate O und hier an dem Rechtecke M. 2) an dem Quadrate P und dem Rechtecke N gleiche Größen. Wenn wir nun das Quadrat P zu O, und das Rechteck N zu M addiren, so müssen wir erhalten — ? K. Gleiche Summen.

L. Richtig! Und nun könnt ihr mir sagen, ob der Flächenraum dieser zwey Quadrate (auf O u. P zeigend) oder der Flächenraum dieses ganzen Quadrats hier (auf I C zeigend) welches in die Rechtecke M und N getheilt ist, der größere ist. K. Es ist einer so groß als der andere.

L. Dieses Quadrat (auf C I zeigend) nennen wir das Quadrat der Hypotenuse und diese zwey da — ? K. Die Quadrate der Katheten.

L. Wie wolltet ihr euch nun ausdrücken, wenn ihr jemanden, der schon wüßte, was die Worte Hypotenuse und Katheten anzeigen, zu erkennen geben wolltet, daß diese zwey Quadrate (auf O und P zeigend) zusammen genommen gerade so groß sind, als dieses hier (auf I C zeigend), ohne aber eben so herzuzeigen wie ich es jetzt gemacht habe, oder die

Figu-

Figuren mit Buchstaben zu nennen? K. Da würden wir sprechen: die Quadrate der Katheten sind zusammengenommen gerade so groß, als das Quadrat der Hypotenuse.

L. Da würdet ihr euch richtig ausdrücken und dabey einen sehr wichtigen Lehrsatz aussprechen, (der von seinem Erfinder, dem berühmten Griechen Pythagoras, welcher Mann 550 Jahr vor Christi Geburt gelebt hat, der Pythagorische Lehrsatz genannt wird). — Nun will ich euch erst die Wahrheit dieses Satzes, die wir durch richtige Schlüße und mit Hülfe dieser Verzeichnungen gefunden haben, auf verschiedene Art bestätigen, und dann wollen wir den hier geführten Beweis so lange wiederholen, bis er euch recht geläufig ist. Hier (Tab. V. Fig. 5.) habe ich ein rechtwinkliches Dreyeck und auf jede Seite desselben ein Quadrat verzeichnet. Diese drey Quadrate sind wieder in kleinere aber durchaus in lauter gleiche Quadrate eingetheilt. Nun zählt einmahl und sagt, wie viel solcher kleiner Quadrate das Quadrat des Katheten AB enthält. K. Es enthält deren neun.

L. Wie viel enthält aber das Quadrat des andern Katheten (BC)? K. Sechzehn.

L. Neun und sechzehn macht —? K. Fünfundzwanzig.

L. Wie viel solcher kleiner Quadrate muß nun wohl das Quadrat der Hypotenuse hier enthalten? K. Fünfundzwanzig.

L. Aus welchem Grunde könnt ihr dieses behaupten? K. Weil wir erst erwiesen haben, daß

das Quadrat der Hypotenuse gerade so groß ist, als ꝛc.

L. Nun zählt die kleinern Quadrate der Hypotenuse und seht, ob deren wirklich fünfundzwanzig vorhanden sind. K. (zählen.)

L. Ihr seht also, daß wir aus diesem großen Quadrate gerade so viele Stückchen von derselben Größe schneiden könnten, als uns diese zwey Quadrate zusammengenommen geben, und ihr habt an diesem Beyspiele schon Eine Bestätigung unsers vorhin erwiesenen Satzes. — Jetzt lege ich hier dieses rechtwinklichte Dreyeck her und an jede seiner Seiten ein Quadrat, dessen Seite, wie ihr seht, gerade so lang ist als die Seite des Dreyecks an welcher es liegt.

Man bilde hier mit den Dreyecken Nro. 14. die 6te Figur Tab. V.

Nun zeigt mir das Quadrat der Hypotenuse. K. (zeigen.)

L. Wie muß sich wohl dieses Quadrat gegen die übrigen beyden da verhalten? K. Es muß so groß seyn, als diese zusammen genommen.

L. Und das ist wirklich der Fall. Denn diese drey Quadrate sind aus Dreyecken, die alle einerley Größe haben, zusammengesetzt. Jedes der kleinern Quadrate besteht aus zwey, beyde also aus vier, und das Quadrat der Hypotenuse besteht allein aus vier solcher Dreyecke Und wenn ich die zwey kleinern Quadrate in ein einziges verwandle (die vier Dreyecke dieser zwey Quadrate so zusammen-

legend, wie sie im Quadrate der Hypotenuse liegen), so wird es gerade so groß als das Quadrat der Hypotenuse, welches ihr sehet, wenn ich nun beyde Quadrate an einander lege, wo ihr dann findet, daß eine Seite des einen, so groß als eine Seite des andern ist. — Hier lege ich abermahls ein rechtwinklichtes Dreyeck her und setze an jeden seiner Katheten ein Quadrat, dessen Seite so groß ist als der anliegende Kathet.

Hier bilde man mit Hülfe von Nro. 13. und 15. die 11te Figur der 8ten Tafel.

Jetzt sagt mir, wie groß die Seite desjenigen Quadrats seyn muß, welches entsteht, wenn ich diese beyden Quadrate in ein einziges vereinige. K. So groß als die Hypotenuse dieses Dreyecks (auf Nro. 15. zeigend).

L. Wir wollen sehen ob sie so groß wird.

Nun wird auf die in der Vorrede angegebene Art fig. 11. Tab. VIII. in ABCD fig. 12. Tab. VIII. verwandelt.

Seht! jetzt habe ich die Quadrate der Katheten dieses Dreyecks (Nro. 15.) in ein einziges verwandelt. Nun haltet die Hypotenuse an eine seiner Seite und seht, ob sie mit ihr einerley Länge habe oder nicht. K. (nach der Untersuchung.) Eine Seite des Quadrats ist wirklich so lang als die Hypotenuse.

L. Da wird also auch durch dieses Beyspiel unser Lehrsatz bestätigt. Und nun wollen wir den Beweis, wie wir ihn vorhin geführt haben, wiederhohlen

hohlen, damit er euch recht geläufig werde. Zu dem Ende soll August die hiezu nöthigen Figuren wieder verzeichnen, und Julius soll ihm theilweise vorsagen, was er verzeichnen soll. Julius. Verzeichne ein rechtwinklichtes Dreyeck — beschreibe auf jeder seiner Seiten ein Quadrat. — Ziehe aus dem rechten Winkel des gegebenen Dreyecks eine gerade Linie durch die Hypotenuse bis an die gegenüberstehende Seite ihres Quadrats, aber so, daß sie parallel mit einer der übrigen beyden Seiten dieses Quadrats laufe. U. s. w.

Die Kinder üben sich nun im Verzeichnen der hieher gehörigen Figuren nach der Angabe eines ihrer Mitschüler, und im Vortrage des Beweises des in Rede stehenden Lehrsatzes. Es ist auch sehr nützlich, wenn sie die Figuren, wie ich vorhin den Lehrer habe thun lassen, auseinandersetzen und einzeln verzeichnen.

Siebenundvierzigster Satz.

Aufgabe.

L. August, ertheile jetzt Heinrichen nach und nach solche Befehle, daß er, wenn er sie gehörig befolgt, am Ende ein Quadrat zu Stande bringt. (August thut dieses und Heinrich verzeichnet das Quadrat M (Fig. 53. Tab. III.)

L. Jetzt ziehe von A nach D eine Diagonale. — So! Was hat der Flächenraum, den die Linien A B,

AB, BD und DA begrenzen, für einen Namen? K. Den Namen Dreyeck.

L. Und was für eine Art von Dreyecken ist es, wenn wir auf die Winkel Rücksicht nehmen? K. Ein rechtwinklichtes.

L. Welcher Winkel ist der rechte? K. Der Winkel B.

L. Woher wißt ihr, daß dieß ein rechter Winkel ist? K. Weil es zugleich der Winkel von einem Quadrate ist, welche Figur ja lauter rechte Winkel hat.

L. Nun soll Emmerich über die Katheten des Dreyecks ABD Quadrate beschreiben. K. (beschreibt die Quadrate N und O).

L. Könnt ihr mir denn nicht sagen, ob das Quadrat M oder N das größere ist? K. Es ist keines größer als das andere.

L. Wie wollt ihr mir diese Behauptung beweisen? K. Die Seite AB in dem Quadrate N ist ja so groß, als die Seite AB in dem Quadrate M, da diese Seite beyden Quadraten gemein ist; und wenn in einem Quadrate eine Seite so groß ist, als eine Seite in einem andern, so sind ja beyde Quadrate gleich groß.

L. Richtig! Und aus den nämlichen Gründen muß das Quadrat O so groß als M seyn. Gesetzt nun, ich verwandelte N und O in ein einziges Quadrat, wie würde sich dieses (aus N und O entstandene) zu dem Quadrate M verhalten? K. Es würde zwey Mahl (doppelt) so groß seyn als M.

L. Richtig! Was müßte ich denn wohl thun, wenn ich jetzt ein Quadrat, dasso groß als Nu. O zusammengenommen wäre, verzeichnen wollte? K. Da dürften Sie ja nur über die Hypotenuse AD ein Quadrat beschreiben.

L. Das will ich auch thun (das Quadrat X beschreibend). Jetzt sagt mir, wie sich das Quadrat X, das so groß als N und O zusammengenommen ist, zu dem Quadrate M verhalten muß. K. Es muß noch Ein Mahl (doppelt) so groß seyn.

L. Und wie wollt ihr diese Behauptung beweisen? K. Nach unserm vorher bewiesenen Lehrsatze ist ja das Quadrat X so groß als die Quadrate N und O zusammengenommen. Nun ist N so groß als M, desgleichen auch O, folglich muß X so groß als 2 M, oder doppelt so groß als M seyn.

L. Nun will ich die Quadrate N, O und X wieder weglöschen, und über die Diagonale AD abermahls ein Quadrat, das ich wieder X nennen will, beschreiben. — So! Jetzt sagt mir geschwind, wie sich dieses Quadrat X zu dem Quadrate M verhält. K. Es ist doppelt (noch Ein Mahl) so groß als M.

L. Hier (ein anderes Quadrat verzeichnend) gebe ich ein Quadrat. Wer sagt mir nun geschwind, was zu thun ist, wenn ein Quadrat verzeichnet werden soll, welches doppelt so groß als das erst gegebene ist? K. Da darf man nur in demselben eine Diagonale ziehen, und über diese ein Quadrat beschreiben.

L. Gut! Ich sehe nun, daß ihr im Stande seyd, die Aufgabe: Ein Quadrat zu verzeichnen,

nen, das noch Ein Mahl so groß als ein gegebenes seyn soll, gehörig aufzulösen. Damit ihr euch aber die Art, wie man diese Aufgabe auflöst, recht einprägt, so soll sich jetzt jeder, theils aus freyer Hand, theils mit den gehörigen Werkzeugen, vier Quadrate von verschiedener Größe verzeichnen und dann jedes derselben verdoppeln. Vorher will ich euch aber noch mit unsern Dreyecken da zeigen, daß ein Quadrat, dessen Seite der Diagonale eines andern Quadrats gleich ist, wirklich noch Ein Mahl so groß, als dieses andere ist.

Man lege hier 2 Dreyecke von Nro. 14. zusammen, bilde damit ein Quadrat und zeige den Kindern die Diagonale. Hierauf vereinige man 4 solche Dreyecke in Ein Quadrat und zeige den Kindern, daß nun die Seiten dieses Quadrats der Diagonale des erstern gleich sind. Man kann auch hier bemerken, daß Nähterinnen, wenn sie zwey kleinere Quadrate in ein einziges verwandeln wollen, jedes der kleinern nach der Diagonale zerschneiden und dann diese 4 Dreyecke in der Ordnung, wie die vorgelegten, zusammen nähen. Hierauf üben sich die Kinder im Verdoppeln verschiedener Quadrate.

L. Carl, nun will ich einmahl annehmen, du wärest ein Schreiner. Ich rufe dich demnach und gebe dir den Auftrag, mir einen Tisch zu verfertigen, der ein Quadrat, und gerade noch Ein Mahl so groß als dieser hier seyn soll, der ebenfalls die Figur eines Quadrates hat. Sage mir nun, wie du es anfangen willst, um dem verlangten Tische die bestimmte Größe zu geben. K. Da messe ich

die Diagonale dieses Tisches und gebe den Seiten des zu verfertigenden die nämliche Länge.

L. Dein Verfahren wäre richtig. Wer von euch will einmahl thun, als wenn er ein Maurer wäre? K. Ich, ich ꝛc.

L. Nun, Theodor, du sollst es seyn. Komm also her und sage mir, wie du es anfangen willst, wenn ich dir den Auftrag gebe, mir auf einem Platze zu einem gewissen Gebäude ein Quadrat abzustecken, das gerade noch Ein Mahl so groß ist, als mein (ein gewisser) Garten, der ebenfalls die Figur eines Quadrates hat. K. Da messe ich erst die Diagonale Ihres Gartens ꝛc.

Der Kürze wegen überlasse ich es jedem Lehrer, seine Schüler noch folgende Aufgaben auflösen zu lassen und ihnen die Richtigkeit des Verfahrens aus dem Beweise des Pyth. Lehrsatzes darzuthun.

1) Aufgabe. Zwey Quadrate von verschiedener Größe A und B (fig. 54.) sollen in ein einziges verwandelt werden.

Auflösung. Man setze beyde Quadrate, oder auch nur ihre Seiten rechtwinklicht an einander, ziehe EG und beschreibe darüber ein Quadrat. Dieses muß nach dem vorhin geführten Beweise so groß als A + B seyn.

2) Aufgabe. Ein Quadrat zu verzeichnen, welches drey Mahl so groß als das Quadrat A (fig. 55.) seyn soll.

Auflösung. Man ziehe die Diagonale BD, welche die Seite zu einem zwey Mahl so großen Quad., als A ist, giebt. An BD setze man unter einem rechten Winkel die Seite CD und ziehe BE. Diese Linie giebt

die

die Seite zu einem Quadrat, welches so groß als das Quadrat von BD + DE, d. h. welches drey Mahl so groß als A ist.

3) Aufgabe. Ein Quadrat zu verzeichnen, welches vier Mahl so groß als M (fig. 53.) ist.

Auflösung. Man ziehe in M die Diagonale AD und beschreibe darüber ein Quadrat. In diesem ziehe man abermahls eine Diagonale und beschreibe darüber wieder ein Quadrat. Letzteres ist vier Mahl so groß als M. (Mit den Dreyecken Nro. 14. läßt sich dieß versinnlichen. Zwey dieser Dreyecke geben das Quadrat M. Ihrer vier geben das Quadrat X, dessen Seite der Diagonale AD gleich ist. Legt man endlich an jede Seite dieses Quadrats (X) noch ein Dreyeck mit der Hypotenuse an, so erhält man ein Quadrat, das vier Mahl so groß als das zuerst hingelegte ist, und dessen Seite gerade so lang als die Diagonale von X ist.)

4) Aufgabe. Vier oder mehr Quadrate von verschiedener Größe in eine Summe zu bringen, oder in ein einziges zu verwandeln.

Auflösung. Es seyen A, B, C, D (fig. 56.) die Seiten der gegebenen Quadrate. Man lege an den rechten Winkel EFC die Linie A von F nach I, und die Linie B von F nach H, so daß also FI = A, und FH = B ist. Hierauf ziehe man die Linie IH. Diese Linie ist die Seite eines Quadrats, welches so groß ist, als die Quadrate, deren Seiten die Linien A und B darstellen. Nun trage man die Linie IH von F nach K und die Linie C von F nach G und ziehe GK. Diese ist die Seite eines Quadrats, welches so groß ist als die Quadrate der Seiten

A +

A + B + C. Nun trage man die Hypotenuse GK von F nach L und die Linie D von F nach M. Nun ist LM die Seite eines Quadrats, welches die Summe der gegebenen ist.

5) Aufgabe. Ein Quadrat zu verzeichnen, welches 1 1/4 Mahl so groß als das Quadrat A (fig. 57.) ist.

Auflösung. Man halbire eine Seite von A, z. B. BC in D und setze BF = BD rechtwinklicht an EB und ziehe die Hypotenuse EF. Dieses ist die Seite eines Quadrats, welches 1 1/4 Mahl so groß als A ist. Denn da ein Quadrat, welches auf der halben Seite eines andern beschrieben wird, gerade das Viertel von diesem ausmacht *), so muß das Quadrat des Katheten EB, vereinigt mit dem Quadrate des Katheten FB = 1/4 A, so groß als 5/4 A seyn.

Will man einige Sätze anticipiren, oder die Beweise ganz weglassen, so kann man hier auch noch folgende Aufgaben auflösen lassen. Man vergesse aber weder bey den vorhergehenden, noch bey diesen folgenden Aufgaben, die Kinder so lange zu üben, bis sie jeden derselben fertig auflösen können.

6) Aufgabe. Ein Quadrat zu verzeichnen, das halb so groß als ein gegebenes ist.

Auflösung. Man halbire eine Seite eines Quadrats, z. B. AB im Quadrate C (fig. 58. Tab. III.) und beschreibe über ihr aus dem Halbirungspuncte D einen halben Kreis. Dann errichte man aus D ein Perpen-

*) Man versinnliche dieses den Kindern mit den Dreyecken Nro. 14., die man zu vier kleinern Quadraten und diese wieder zu einem größern vereinigt.

pendikel und verlängere es bis an den Bogen AB, wodurch dieser halbirt wird. Nun ziehe man die Sehnen EA und EB, welche, da sie gleichen Bogen zugehören, einander gleich sind, und mit einander in E einen rechten Winkel bilden, weil alle Winkel im Halbkreise rechte Winkel sind. Nun ist AB die Hypotenuse und ihr Quadrat so groß als die Quadrate der Katheten AE und EB zusammengenommen. Da aber AE = EB ist, so ist ein Quadrat auf AE einem Quadrate auf EB gleich, und folglich jedes davon die Hälfte von C. — Hieraus folgt auch, daß wenn man AE rechtwinklicht bey G an BG setzt und BH zieht, diese Linie die Seite zu einem Quadrate giebt, welches 1 1/2 Mahl so groß als C ist.

7) Aufgabe. Ein Quadrat zu verzeichnen, welches 3/4 von einem gegebenen enthält.

Auflösung. Man halbire eine Seite des gegebenen Quadrats, z. B. BC (fig. 59.), beschreibe aus dem Halbirungspuncte über BC einen halben Kreis, trage die Hälfte von BC aus B an den Umfang des Kreises nach D, und ziehe DE, welche Linie die Seite zu einem Quadrate giebt, welches 3/4 Mahl so groß als A ist. Denn da das Quadrat auf BD 1/4 von dem Quadrate A ist, so muß das Quadrat auf DC 3/4 davon seyn, weil die Quadrate dieser beyden Katheten zusammengenommen gerade so groß als das Quadrat A sind. Hieraus folgt wieder, daß, wenn man DC rechtwinklicht an CF setzt und CG zieht, dieses die Seite zu einem Quadrate seyn muß, welches 1 3/4 Mahl so groß als A ist.

8) Aufgabe. Ein gegebenes Rectangulum A (fig. 60.) in ein Quadrat zu verwandeln.

Auf-

Auflösung. Man ziehe eine Linie b a, die so lang als die Seite BA im Rectangulum A ist. An diese Linie setze man eine andere a c von der Länge AC, oder: man setze zwey an einanderliegende Seiten des gegebenen Rectangulums so an einander, daß sie eine einzige gerade Linie bilden. Hierauf halbire man die ganze Linie c b in d, beschreibe aus dem Halbirungspuncte den halben Kreis c e b und ziehe aus a, d. i. aus demjenigen Puncte, wo die 2 Seiten des Rectangulums zusammengesetzt worden sind, die senkrechte, bis an den Umfang des Kreises reichende Linie a e. Diese Linie ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Seiten des Rectangulums AB und AC. Da nun das Quadrat der mittlern Proportionallinie alle Mahl so groß ist, als das Rectangulum, welches die beyden übrigen Linien zu Seiten hat; so muß ein Quadrat, dessen Seite = a e ist, so groß als das Rectangulum A seyn. Hieraus folgt auch, daß man jedes Dreyeck in ein Quadrat verwandeln kann. Um dieses zu bewerkstelligen, darf man nur das gegebene Dreyeck in ein Rectangulum auf die Art, wie oben gezeigt worden ist, verwandeln, und aus diesem Rectangulum ein Quadrat machen.

Will man den Kindern durch ein Beyspiel zeigen, daß die Richtigkeit der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe durch die Erfahrung bestätigt werde, so zeichne man das Rectangulum (fig. 1. Tab. VIII.) auf ein auf dünne Pappe aufgeklebtes Blatt Papier und gebe der Seite CA 4, und der Seite CD 2 Zoll. Dann verwandle man auf die vorhergezeigte Weise dieses Rectangulum in das Quadrat A (Fig. 2. Tab. VIII.) Hierauf schneide man das Rectangulum AD (fig. 1.) gerade in der Mitte nach der Linie

E F

EF von einander, und halbire jede dieser Hälften aufs neue nach den Diagonalen CF und EB. Die auf diese Art entstandenen 4 Dreyecke lege man so zusammen, daß ihre 4 rechten Winkel um einen Punct zu liegen kommen, wie fig. 3. Tab. VIII. zeigt, wodurch man ein Quadrat erhält. Legt man nun dieses auf fig. 2. Tab. VIII., so wird man sehen, daß von beyden das eine so groß als das andere ist. Statt der Papierausschnitte kann man sich auch der Dreyecke Nro. 14. bedienen. Nur trifft hier nicht alles auf ein Haar zu, weil Holz nicht mit der Accuratesse kann zugehobelt werden, als man einige Stückchen Papier beschneiden kann.

Will man auch sinnlich zeigen, daß ein Quadrat, worein man auf die angegebene Art ein Dreyeck verwandelt hat, wirklich den nämlichen Flächenraum habe, den das Dreyeck hatte, so kann man dieß folgender Massen thun: Man bilde mit einigen Stücken von Nro. 13. das Dreyeck abc (fig. 4. Tab. VIII.) Hierauf drehe man 1 und 2 herum und lege sie an 3 uud 4 in der Lage, wie die punctirten Linien zeigen, wodurch das Parallelogramm (Rechteck) ABCD entsteht. Nun bilde man mit den Dreyecken Nro. 14. ebenfalls ein Rechteck, wie fig. 1. Tab. VIII. zeigt. Dieses mit Nro. 14. gebildete Rechteck ist so groß, als das Rechteck ABCD (fig. 4.), daher man sagen kann, daß es die Stelle von diesem (fig. 4.) vertrete. Nun lege man die 4 Dreyecke, woraus fig. 1. besteht, so zusammen, wie sie in fig. 3. liegen, und man wird ein Quadrat bekommen, welches den nämlichen Flächeninhalt hat, den das vorhin aus den gleichen Stücken zusammengesetzte Dreyeck hatte. Und hat man diese Verwandlung vorher durch eine Zeichnung

vorgenommen und alles in der Größe der vorhandenen hölzernen Stücke gezeichnet, so wird das aus den Dreyecken Nro. 14. zusammengesetzte Quadrat mit dem gezeichneten so ziemlich übereinstimmen. Daß es nicht ganz damit übereinstimmt, liegt an der Mangelhaftigkeit der hölzernen Dreyecke, die kein Künstler mit aller mathematischen Genauigkeit verfertigen kann, wenigstens nicht um die gangbaren Preiße dieser Waare verfertigt.

Achtundvierzigster Satz.

Lehrsatz nebst einigen Aufgaben.

L. Wer beschreibt mir denn geschwind eine krummlinigte Figur, in welcher alle Puncte ihres Umfangs (ihrer Umfangslinie) gleichweit von einem gewissen in ihr befindlichen Puncte abstehen? K. (beschreiben ohne Zweifel einen Kreis.)

L. Ihr habt die Figur getroffen, deren Merkmahle ich euch angab. Sie heißt —? K. Kreis.

L. Recht! Diese Figur soll nun eine Zeitlang der Gegenstand unserer Unterredungen seyn, indem wir gerade Linien, Winkel und geradlinigte Figuren, die beym Kreise vorkommen, untersuchen und näher kennen lernen wollen. Wie eine gerade Linie heißt, die auf beyden Seiten von der Kreislinie begrenzt wird, aber nicht über den Mittelpunct geht, werdet ihr wohl noch wissen. Wie heißt sie? K. Sehne.

L. Und

L. Und wie heißt die gerade Linie, die vom Mittelpunct bis an die Peripherie gezogen werden kann? — Und diejenige, welche durch den Mittelpunct geht und auf beyden Seiten von der Peripherie begrenzt wird? — Wie nennt man aber das Stück von der Kreislinie, welches von einer Sehne abgeschnitten wird? — Nun gut! ich sehe, daß ihr die gleich beym Anfang dieser Lectionen gelernten Namen gut behalten habt. — August, jetzt ziehe einmahl in diesem Kreise eine gerade Linie, die nicht über den Mittelpunct geht, und auf beyden Seiten von der Peripherie begrenzt wird. K. (zieht AB Fig. 61. Tab. IV.)

L. An dieser Figur können wir noch nichts Neues lernen, daher wollen wir sie noch etwas verändern. Wir wollen nämlich die Sehne AB halbiren, alsdann in ihrer Mitte eine senkrechte Linie errichten und diese auf beyden Seiten bis an die Peripherie verlängern. Wer getraut sich dieß alles zu thun? K. Ich, ich &c.

L. Theodor, du sollst es thun. Sage mir aber vorher noch Ein Mahl alles genau, was du thun sollst, und dann beschreibe mir die Art, wie du es thun willst. K. Ich soll die Sehne AB &c. — — Dieses werde ich auf folgende Art bewerkstelligen. Ueber und unter der Sehne AB beschreibe ich ein gleichseitiges Dreyeck &c. &c.

L. Nun haben wir etwas bekommen, worüber wir eine Untersuchung anstellen können, nämlich die Linie CD. Was glaubt ihr wohl, was wir

allenfalls von dieser Linie zu erforschen suchen können? K. —

L. Könnt ihr mir denn schon mit vollkommener Gewißheit sagen, ob diese Linie eine Sehne oder ein Durchmesser ist? — K. Nein.

L. Nun da gäbe es ja etwas zu untersuchen, nämlich —? K. Ob diese Linie eine Sehne oder ein Durchmesser ist.

L. Was müßten wir denn von dieser Linie (CD) noch wissen, um überzeugt seyn zu können, daß sie ein Durchmesser wäre? (Welches sind die Merkmahle eines Durchmessers)? K. Daß sie über den Mittelpunct gienge.

L. Freylich! Nun sind zwey Fälle möglich. Endweder geht diese Linie über den Mittelpunct, oder —? K. Sie geht nicht darüber.

L. Das heißt mit andern Worten: CD ist entweder ein Durchmesser oder eine Sehne. Wir wollen einmahl den letztern Fall annehmen und also von der Linie CD behaupten —? K. Daß sie eine Sehne sey.

L. Welcher Punct könnte alsdann nicht in ihr liegen? K. Der Mittelpunct.

L. Dieser müßte daher in irgend einer andern Stelle der Kreisfläche anzutreffen seyn. Wir wollen einmahl annehmen, als läge er hier in E und wollen von ihm nach unserer ersten Regel gerade Linien nach A und B und dem Halbirungspuncte F ziehen, und zugleich will ich der leichtern Uebersicht wegen ein Stückchen von unserer

zu

zu untersuchenden Linie DC weglöschen. (Man lösche von der DC so viel weg, als im Triangel AFE liegt.) Jetzt sagt, wie viel und was für geradlinigte Figuren wir in diesem Kreise haben? K. Zwey Dreyecke.

L. Was sollen wir denn immer thun, wenn uns zwey solche Figuren vorkommen? K. Sie vergleichen und sehen, ob sie nicht einander gleich und ähnlich sind.

L. Nun thut dieses. K. (stellen die Untersuchung an. Finden sie nicht, was leicht zu finden ist, so frage man:)

L. Was für ein Punct soll denn E seyn? K. Der Mittelpunct.

L. Was müssen demnach die Linien EA u. EB für Namen führen? K. Den Namen Halbmesser.

L. Wie müssen sie sich also zu einander verhalten? K. Sie müssen rc.

L. Nach welchem Grundsatze könnt ihr dieses behaupten? K. Nach dem: alle Halbmesser rc.

L. Nun forscht doch nach, und seht, wie sich je zwey und zwey von den übrigen Seiten dieser Dreyecke zu einander verhalten. K. AB haben wir halbirt, also muß AF so groß als BF seyn und EF ist beyden gemein, also in dem einen so groß als in dem andern.

L. Und hieraus folgt? K. Daß diese zwey Dreyecke einander gleich und ähnlich sind.

L. Nun bezeichnet alle gleichnamigen Winkel und nennt sie. K. B und A, F und m, o und p.

Wie wollt ihr denn die Winkel F und m nennen, da sie den Schenkel FE gemein haben und ihre beyden übrigen Schenkel in einer geraden Linie liegen? K. Nebenwinkel.

L. Und was sind Nebenwinkel, wenn sie einander gleich sind, für Winkel? K. Rechte.

L. Gut! Jetzt merkt recht, was wir von den Winkeln F und m durch ordentliche Schlüsse herausgebracht haben, und zieht das vorhin weggelöschte Stückchen von CD wieder. — So! Wie steht denn DF auf AB? K. Senkrecht.

L. Was muß also DFA für ein Winkel seyn? K. Auch ein rechter.

L. Vorhin haben wir herausgebracht, daß der ganze Winkel EFA, ein rechter sey; jetzt haben wir gefunden, daß F oder DFA, auch ein rechter seyn müsse. Da nun alle rechte Winkel einander gleich sind, so muß DFA also ein Theil von dem Winkel EFA, so groß seyn, als der ganze Winkel EFA. Ist aber dieses möglich? K. Nein.

L. Wie lautet der Grundsatz, nach welchem ihr dieses gleich verneinen könnt? K. Ein Theil ist kleiner als das Ganze.

L. Wir haben demnach etwas ganz Ungereimtes, etwas Unmögliches durch lauter ordentliche Schlüsse gefunden. Ihr wißt aber, daß, wenn dieser Fall eintritt, dieß ein Beweis ist, daß der allererste Satz, den wir bey einer Untersuchung zu Grunde legten, oder von welchem wir ausgiengen, falsch

falsch seyn müsse. Nun sagt, welchen Satz wir vorhin annahmen und bey unserer Untersuchung zu Grunde legten? K. Die Linie CD ist eine Sehne.

L. Kann denn nun dieser Satz wahr seyn? K. Nein.

L. Was muß denn sonach die Linie CD seyn, wenn sie keine Sehne seyn kann? K. Ein Durchmesser.

L. Freylich! Denn sobald wir annehmen, daß CD kein Durchmesser sey und also der Mittelpunct außer ihm in einem andern Theile der Kreisfläche liege, so können wir auf die vorhin gezeigte Weise darthun, daß der Theil so groß als das Ganze seyn müsse. Damit ihr aber seht, daß man auf diese Ungereimtheit kommen müsse, wenn man außer E auch irgend einen andern Punct in der Kreisfläche, der aber nicht in CD liegt, zum Mittelpunct annimmt, so will ich hier (aus Fig. 61. Fig. 63. machen) in G den Mittelpunct des Kreises annehmen.

Man wiederhohle hier mit den Kindern durch Hülfe der jetzigen Verzeichnung den vorhin geführten Beweis.

L. Auf diese Weise läßt sich von jedem andern, aber nicht in der Linie CD liegenden Puncte dieser Kreisfläche beweisen, daß er nicht der Mittelpunct seyn könne. Dieser muß also nothwendig liegen — nun in welcher Linie? K. In CD.

L. Jetzt haben wir ja von der Linie CD etwas, was wir vorher nicht wußten, erfahren: was wohl?

 K. Daß

K. Daß in ihr der Mittelpunct des Kreises liege. (Daß sie durch den Mittelpunct gehe.)

L. Nun merkt! Wenn ich diese oder diese (verschiedene Sehnen ziehend) oder irgend eine andere Sehne in diesem Kreise zöge, sie dann halbirte und auf ihrer Mitte eine senkrechte Linie errichtete, so würde ich von dieser alle Mahl erweisen können, daß sie durch den Mittelpunct gehen und also, wenn ich sie anders auf beyden Seiten bis an die Peripherie verlängere, ein Durchmesser seyn müsse. Wir haben sonach ein Merkmahl gefunden, woran wir gleich erkennen können, daß eine in einem Kreise gezogene Linie durch den Mittelpunct gehen müsse. Wenn können wir von einer solchen Linie dieses behaupten? K. Wenn sie mitten auf einer Sehne senkrecht steht.

L. Gut! Und nun drückt den Lehrsatz, den ihr jetzt gelernt habt, vollständig aus. K. Wenn eine Linie auf der Mitte einer Sehne senkrecht steht, so geht sie durch den Mittelpunct.

L. Wer getraut sich aber jetzt diesen Lehrsatz zu beweisen und die nöthige Zeichnung dazu zu machen? K. (üben sich im Verzeichnen der hieher gehörigen Figur und im Vortrage des Beweises.)

L. Hier (Fig. 64. Tab. IV.) habe ich einen Kreis mit mehreren Sehnen, und auf der Mitte einer jeden derselben steht eine Linie senkrecht. Nun sagt mir, ob diese Linien, wenn ich sie genug verlängerte, wohl alle in einem Puncte zusammentreffen würden oder

oder nicht? K. Sie würden alle in einem Puncte zusammentreffen.

L. In welchem? K. In dem Mittelpuncte.

L. Beweißt mir diese Behauptung durch einen ordentlichen Schluß? K. Alle Linien, die auf der Mitte einer Sehne senkrecht stehen, gehen durch den Mittelpunct des Kreises, diese Linien hier stehen alle ꝛc. folglich müssen sie alle durch den Mittelpunct gehen und also da zusammentreffen.

L. Richtig! — Nun will ich euch zeigen, daß die Erfahrung unsern vorhin erwiesenen Satz bestätigt. Hier *) habe ich einen Kreis mit mehrern Sehnen, deren Mitte durch einen kleinen Strich bemerkt ist. Zugleich ist auch in diesem Kreise der Mittelpunct angegeben. Wenn ich nun diesen Zwirnsfaden, woran ein Stückchen Bley hängt, an die Mitte einer jeden dieser Sehnen halte, wo er die Stelle einer auf ihr stehenden senkrechten Linie vertritt, so wird er (vorausgesetzt, daß man die Scheibe gehörig hält) immer über den Mittelpunct gehen. — Seht ihrs? — —

L. Jetzt will ich doch sehen, wer mir sagen kann, wie man es anzufangen habe, wenn man in diesem Kreise (eine solche Figur beschreibend) wo

*) Man beschreibe einen Kreis auf einem Quartblatte, ziehe in demselben so viel Sehnen als man will, und bemerke in jeder durch einen kleinen Strich den Halbirungspunct und dieses Blatt klebe man alsdann auf die Rückseite von Nro. 8.

der Mittelpunct nicht bemerkt (unbekannt) ist, einen Durchmesser ziehen will. K. Da darf man ja nur eine Sehne ziehen, diese halbiren, auf ihrer Mitte eine senkrechte Linie errichten und diese auf beyden Seiten bis an die Peripherie verlängern.

L. Wer von euch kann ferner noch das jetzt angegebene Verfahren beschreiben? K. (beschreiben.)

L. Nun, August, so ziehe in diesem Kreise eine Linie, von der du überzeugt seyn kannst, daß sie ein Durchmesser ist. K. (verzeichnen Fig. 65., ohne C D.)

L. Diese Linie ist allerdings ein Durchmesser und in ihr muß der Mittelpunct liegen. Aber nun möchte ich auch wissen, wo er liegt. Könnt ihr mir die Stelle in dieser Linie nennen, wo dieser Punct befindlich seyn muß. K. In der Mitte.

L. Freylich! Aber könnt ihr denn auch die Mitte dieser Linie, oder den Halbirungspunct finden? K. Ja wohl.

L. Wie denn? K. Wir dürfen ja die Linie nur halbiren.

L. Thut dieses einmahl. K. (halbiren und ziehen C D.)

L. Recht so! Was für einen merkwürdigen Punct im Kreise habt ihr jetzt gefunden? K. Den Mittelpunct.

L. Da habt ihr ja die Aufgabe: den Mittelpunct eines Kreises zu finden, aufgelöst. Wer kann mir jetzt die Art und Weise, wie man diese

diese Aufgabe löst, beschreiben? K. Man macht erst eine Sehne ꝛc.

L. Recht so! Jetzt will ich einmahl sehen, wer mir folgenden Befehl recht pünctlich befolgen kann. Macht in einem Kreise zwey verschiedene Sehnen nach Belieben, diese halbirt und errichtet auf der Mitte einer jeden eine senkrechte Linie, und verlängert sie bis an die Peripherie. K. (zeichnen Fig. 66. Tab. IV.)

L. Jetzt sagt mir, was für ein merkwürdiger Punct in der Linie A B liegen muß. K. Der Mittelpunct des Kreises.

L. Aber was muß in der Linie C D für ein merkwürdiger Punct liegen? K. Auch der Mittelpunct des Kreises.

L. Woher wißt ihr denn dieses? K. Das sagt uns ja der vorhin erwiesene Satz: Wenn eine Linie auf der Mitte einer Sehne ꝛc.

L. Welcher Punct mag denn nun wohl der Mittelpunct seyn? K. Der Punct E (wo beyde Linien einander schneiden).

L. Warum meynt ihr denn, daß gerade E der Mittelpunct seyn müsse? K. Weil nur dieser in beyden Linien liegt.

L. Richtig! Einen andern Punct haben und können diese zwey Linien nicht gemein haben, es muß also nothwendig E der Mittelpunct seyn. Gesetzt aber, es sagte jemand: c ist der Mittelpunct, was würdet ihr hierauf antworten. K. Wir würden sagen: c kann nicht der Mittelpunct seyn,

weil

weil dieser Punct (c) nicht auch in der Linie CD liegt, und der Mittelpunct doch auch in dieser Linie liegen muß.

L. Diese Antwort wäre ganz richtig. Haben wir denn jetzt auch den Mittelpunct durch Halbirung der Linie CD oder BA gefunden? K. Nein.

L. Wie haben wir ihn denn gefunden? K. Wir haben noch eine zweyte Sehne gezogen, diese halbirt, und auf ihrer Mitte eine senkrechte bis an die Peripherie verlängerte Linie errichtet.

L. Da habt ihr also eine von der vorigen etwas veränderte Art, den Mittelpunct eines Kreises zu finden. Nun verzeichne sich jeder 6 ꝛc. Kreise von verschiedener Größe und suche sich dann auf die jetzt angegebene Art den Mittelpunct dazu.

Uibung!

L. Wer kann mir denn nun wohl sagen, wie ich es anfangen müßte, wenn ich den Mittelpunct von dem Boden eines Faßes ꝛc. finden wollte? K. Da müßten sie eben auf diesem Boden zwey Sehen ziehen ꝛc.

Ich halte es, besonders in Bürgerschulen, für sehr nützlich, wenn hier den Kindern verschiedene scheibenförmige Körper mit dem Auftrage vorgelegt werden, die Mittelpuncte ihrer Kreisflächen zu suchen.

L. Nun will ich einmahl AB und CD (Fig. 66) über die Peripherie hinaus verlängern, sagt mir, ob dadurch der Punct E aus seiner Stelle verrückt worden ist, oder nicht. K. Er ist nicht ꝛc.

L. Kommt

L. Kommt also, wenn wir den Mittelpunct suchen wollen, etwas darauf an, wie weit die Linien CD und AB über ihren Durchschnittspunct hinausragen? K. Nein.

L. Freylich nicht! Denn nur ihren Durchschnittspunct brauchen wir. Jetzt will ich ein Stück von der Kreislinie weglöschen (aus Fig. 66. Fig. 67. machend), so daß uns nur der Bogen AC übrig bleibt, um von euch zu hören, ob ihr mit Hülfe des Zirkels die Kreislinie wovon jetzt nur ein Stück da ist, wohl wieder ergänzen könntet. K. Das können wir freylich.

L. Wo, in welchem Puncte, wolltet ihr denn da den Zirkel einsetzen? K. In dem Puncte E.

L. Nun da würdet ihr freylich die Kreislinie ergänzen können, da E der Mittelpunct ist, aus welchem der Bogen AC beschrieben worden ist. Wie aber, wenn ich alle die geraden Linien hier weglösche, so daß bloß ein Bogen wie dieser (AC Fig. 68. neben 67 verzeichnend) übrig bliebe, würdet ihr denn da wohl den Mittelpunct E wieder finden und daraus das fehlende Stück von der Kreislinie ergänzen können? K. Ey freylich.

L. Wie würdet ihr denn das machen? K. Da zögen wir in diesem Bogen 2 Sehnen errichteten auf der Mitte einer jeden eine senkrechte Linie und verlängerten diese, bis sie einander schnitten. Der Durchschnittspunct wäre dann der Punct, aus dem wir die Kreislinie ergänzen könnten.

L. Das Verfahren wäre richtig, und ich sehe, daß ihr die Aufgabe: zu einem gegebenen

Bo-

Bogen den Mittelpunct zu finden, aus dem man, wenn man will, die Kreislinie ergänzen kann, auflösen könnt. Hier ist ein Bogen (einen verzeichnend). Theodor soll dazu den Mittelpunct suchen, Carl soll ihm aber alles, was er zur Erreichung seines Zweckes zu thun hat, vorsagen. K. (thut dieß).

Uibung!

L. Hier (Fig. 68.) gebe ich einen Bogen. Wer ist nun wohl im Stande, mir einen andern von der nämlichen Größe zu beschreiben. K. (müssen hier darauf kommen, zu AC (Fig. 68. den Mittelpunct zu suchen, dann den Halbmesser, womit AC beschrieben ist zu nehmen, und damit einen Bogen zu beschreiben und diesen dem gegebenen gleich zu machen) *).

Hier sage man den Kindern, daß Maurer, wenn sie Bogen bey Hausthüren, Kellergewölben zc. einander gleich machen wollen, auf diese Weise verfahren müssen.

L., (welcher Fig. 69. verzeichnet hat.) Nun betrachtet einmahl diese euch schon bekannte Figur, wo auf der Mitte zweyer Sehnen senkrechte Linien errichtet sind, die einander schneiden, noch etwas genauer. Die Linien AB und CB haben, weil sie den Endpunct B gemein haben, zusammen 3 Endpuncte,

*) Wenn sich auch die Kinder noch nicht deutlich bewußt sind, daß zu gleichen Sehnen gleiche Bogen gehören, so machen sie doch von dieser Wahrheit hier Anwendung.

puncte, durch welche, wie ihr seht, die Kreislinie geht. Nun lösche ich die Kreislinie ABC weg, um zu sehn, ob niemand unter euch ist, der wieder eine Kreislinie ziehen kann, die durch die 3 Endpuncte der Linien AB und CB geht. Wer getraut sich wohl dieses zu thun? K. Ich, ich ꝛc.

L. Wo oder in welchem Puncte wolltest du wohl den Zirkel einsetzen, um die verlangte Kreislinie zu beschreiben? K. In E.

L. Richtig! Dieß ist unter allen möglichen Puncten der einzige, aus welchem eine Kreislinie, die durch die 3 Puncte ABC geht, beschrieben werden kann. Wie aber, wenn ich diese (die punctirten) Linien weglöschte, wäret ihr da wohl im Stande, den Punct E wieder zu finden? K. Allerdings!

L. Wie denn? K. Wir halbirten die Linien AB und BC, errichteten auf der Mitte einer jeden eine senkrechte Linie, und verlängerten diese bis eine die andere schnitte.

L. Nun da will ich die Linien AB und BC ganz allein verzeichnen und sehen, ob ihr den wirklich durch die 3 Endpuncte dieser Linien eine Kreislinie ziehen könnt. K. (ziehen auf AB und BC (Fig. 69.) die punctirten Linien und beschreiben aus E den Kreis.)

L. Ihr habt eure Sache gut gemacht und eine neue Aufgabe aufgelöst. Könnt ihr mir wohl sagen, wie diese Aufgabe lautet? K. Durch die drey Endpuncte zweyer geraden Linien, die in einem Puncte zusammenstoßen, eine Kreislinie zu beschreiben.

L. Gut!

L. Gut! Wer sagt mir nun, wie man es machen muß, um diese Aufgabe aufzulösen? K. Man halbirt die zwey gegebenen Linien rc.

L. Nun merkt: Statt der zwey Linien AB und AC können uns auch nur die drey Puncte B, A und C, die aber durchaus nicht in einer geraden Linie liegen dürfen, gegeben seyn, mit dem Auftrage, durch sie eine Kreislinie zu beschreiben. In diesem Falle darf man dann nur die drey Puncte durch gerade Linien verbinden, und dann gerade wie vorhin verfahren. Hier sind drey, nicht in einer geraden Linie liegende Puncte Versucht nun eine Kreislinie zu beschreiben, die durch sie geht. K. (verbinden diese drey Puncte, durch zwey gerade Linien, und verfahren wie vorhin, daß sie Fig. 69. erhalten.)

L. Nun habt ihr wieder eine Aufgabe aufgelöst. Wie lautet sie? K. **Durch drey gegebene Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.**

L. Carl, gieb du mir geschwind das Verfahren an, welches man, um diese Aufgabe aufzulösen, beobachten muß. K. (giebt dieß an.)

L. Da ihr jetzt durch drey gegebene, aber nicht in einer geraden Linie liegende Puncte einen Kreis beschreiben könnt, so könnt ihr gewiß auch eine Kreislinie beschreiben, die durch die drey Spitzen dieses Dreyecks (Fig. 70. ohne punctirte Linien verzeichnend) geht. Denn durch diese drey

Spitzen

Spitzen sind uns nichts, als drey Puncte gegeben, durch welche eine Kreislinie gezogen werden soll. K. (ziehen nun gewiß die punctirten Linien Fig. 70.)

L. Das war recht! Auf diese Weise läßt sich durch die drey Spitzen eines jeden Triangels ein Kreis beschreiben.

Uibung im Auflösen der vorhergehenden Aufgaben!

Ihr wißt nun, daß eine auf der Mitte einer Sehne senkrecht errichtete Linie durch den Mittelpunct des Kreises geht. Nun merkt auch noch folgende Sätze, die ich aber der Kürze wegen nur ohne Beweis anführen will.

1) Eine aus dem Mittelpuncte eines Kreises auf die Mitte einer Sehne gezogene Linie steht senkrecht auf dieser Sehne.

2) Eine Linie, welche aus dem Mittelpuncte eines Kreises senkrecht auf eine Sehne gezogen wird, theilt die Sehne, und wenn man sie genug verlängert, auch den zu dieser Sehne gehörigen Bogen in zwey gleiche Theile*).

L. Jetzt seht diese Figur hier (Fig. 72.) an, wo aus dem Mittelpuncte eines Kreises eine Linie gerade auf die Mitte einer Sehne gezogen ist, und sagt mir, wie AB auf der Sehne stehen muß. K. Senkrecht.

L. Be-

*) Man schreibe diese 2 Sätze an die schwarze Tafel.

L. Beweist mir diese Behauptung durch einen ordentlichen Schluß. K. Jede aus dem Mittelpuncte eines Kreises auf die Mitte einer Sehne ꝛc. Die Linie A B ist aus dem Mittelpuncte ꝛc. folglich ꝛc.

L. Gesetzt, ich sagte euch, daß die Linie AB (Fig. 72.) aus dem Mittelpuncte dieses Kreises senkrecht auf die Sehne C gezogen wäre, was könntet ihr dann von B C und BD, den Theilen der Sehne, behaupten? K. Daß sie einander gleich seyn müßten.

L. Und durch welchen Schluß könnten wir diese Behauptung beweisen? K. Durch diesen: Eine Linie, welche aus dem Mittelpuncte eines Kreises senkrecht ꝛc. hier ist ꝛc. folglich ꝛc.

L. Der Bogen CBD hat mit der Sehne CD einerley Anfangs- und Endpunct, deßhalb sagt man: dieser Bogen gehört der Sehne CD zu. Wenn ich nun die Linie A B verlängere, so wird dieser der Sehne CD zugehörige Bogen in zwey Theile getheilt. Wie müssen sich diese Theile zu einander verhalten? K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Wie lautet der Obersatz zu dem Schluße, wovon ihr jetzt den Schlußsatz ausgesprochen habt? K. Eine Linie ꝛc.

L. Gesetzt nun, ich wollte einen Bogen irgend eines Kreises in zwey gleiche Theile theilen (halbiren), was dürfte ich da nur thun? K. Aus dem Mittelpuncte dieses Kreises auf die Sehne des zu halbirenden Bogens eine Linie senkrecht ziehen und diese bis an den Bogen verlängern.

Neunundvierzigster Satz.

Lehrsatz.

L., (welcher Fig. 71. verzeichnet hat.) Hier habe ich einen Kreis verzeichnet, auf der Peripherie desselben zwey gleiche Bogen AB und BC abgeschnitten und zu jedem dieser Bogen eine Sehne gezogen. Diese beyden Bogen, sage ich, sind einander gleich: wie sich aber ihre Sehnen zu einander verhalten, ist unbekannt und soll erforscht werden. Zu dem Ende wollen wir die hier gegebenen Puncte nach der ersten unserer Regeln durch gerade Linien verbinden und daher von den Endpuncten der Sehnen gerade Linien nach dem Mittelpuncte ziehen, daß wir also die Halbmesser AD, BD, und CD bekommen. — Ehe wir unsere Untersuchung anfangen, will ich erst sehen, wer von euch Heinrichen solche Befehle ertheilen kann, daß er, wenn er sie pünctlich befolgt, die nämliche Figur hier (Fig. 71.) zu Stande bringt. (Das eine oder andere Kind spricht: beschreibe einen Kreis, schneide auf seiner Peripherie zwey gleiche Bogen ab, ziehe zu jedem dieser Bogen eine Sehne rc.)

L. Jetzt sagt mir, was wir zu erforschen suchen wollen. K. Wie sich die Sehnen AB und BC zu einander verhalten.

L. Was ist uns denn von den Bogen dieser Sehnen bekannt? K. Daß sie einander gleich sind.

L. Was werden wir denn wohl zu thun haben, da wir durch das Ziehen der Linien AD rc.

zwey Dreyecke bekommen haben? K. Wir müssen sie mit einander vergleichen und sehen, ob sie nicht einander gleich und ähnlich sind.

L. Diese Vergleichung stellt an und denkt dabey, daß der Bogen AB das Maß des Winkels o, und der Bogen BC das Maß des Winkels p sey, und daß Winkel, die einerley Maß haben, auch gleiche Größen haben müssen. K. (finden nun ohne Mühe, daß $AD = DC$ und $DB = DB$ } weil dieß lauter Halbmesser sind,

und

$\angle o = \angle p$, weil beyde Winkel einerley Maß haben, daß also beyde Triangel einander gleich und ähnlich seyn müssen.)

L. Da ihr nun herausgebracht habt, daß diese zwey Dreyecke einander gleich und ähnlich sind, so könnt ihr mir ja wohl sagen, wie sich die beyden Sehnen AB und BC zu einander verhalten müssen. K. Diese müssen einander gleich seyn.

L. Aus welchem Grunde kann man dieses behaupten? K. Weil es die gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten von zwey gleichen und ähnlichen Dreyecken sind.

L. Gut! Was wir jetzt von diesen zwey Sehnen bewiesen haben, daß läßt sich von jeden zwey Sehnen gleicher Bogen eines oder auch gleicher Kreise beweisen, und daher können wir überhaupt behaupten, daß die Sehnen — nun wer vollendet den Satz? K. Gleicher Bogen eines

oder

oder gleicher Kreise einander gleich seyn müssen.

L. Und wer beweist mir diesen Lehrsatz ganz ohne meine Beyhülfe? K. (üben sich in der Verzeichnung der hieher gehörigen Figur und im Vortrage des verlangten Beweises.)

L. Hier sind zwey Kreise, die mit einerley Halbmesser beschrieben sind, dieser Bogen (zeigend) in diesem Kreise hier ist gerade so groß, als dieser Bogen hier in dem andern Kreise, auch sind die Mittelpuncte bemerkt. Nun sagt mir geschwind, wie ich jetzt, ohne einen Zirkel zum Abmessen zu gebrauchen, zwey gleiche Linien ziehen könnte, wovon die eine in diesem, die andere in dem andern Kreise hier läge. K. Da dürften sie nur in jedem dieser Kreise entweder einen Durchmesser, oder einen Halbmesser, oder eine Sehne zu dem bemerkten Bogen ziehen.

L. Das war mit Ueberlegung geantwortet. Wenn ich nun fragte: welches sind einige der Fälle, wo man behaupten kann, daß zwey gerade Linien einander gleich sind, und ihr in eurer Antwort die drey hier angegebenen Fälle anführen wolltet, wie würdet ihr da antworten? K. Wenn zwey Linien entweder Durchmesser, oder Halbmesser gleicher Kreise, oder Sehnen gleicher Bogen von gleichen Kreisen sind.

L. Nun will ich sehen, wer mir folgenden Satz, den ich aber der Kürze wegen nur ohne Beweis anführen will, wird merken können: Wenn in einem Kreise oder in gleichen Krei-

 sen

sen eine Sehne einer andern Sehne gleich ist, so sind auch die Bogen, welche diesen Sehnen zugehören, von einerley Größe. K. (wiederhohlen diesen Satz.)

L. Hier sind zwey gleiche Kreise und in dem einen ist eine Sehne so groß als in dem andern. Nun sagt, welcher von diesen beyden Bogen (zeigend) der größere ist. K. Es ist einer so groß als der andere.

L. Woher wißt ihr dieß? K. Weil sie gleichen Sehnen von zwey gleichen Kreisen zugehören.

L. Hier habe ich abermahls zwey Kreise (man beschreibe einen größern und einen kleinern), und die Sehnen, wovon die eine in dem einen, die andere in dem andern dieser Kreise ist, sind einander gleich, daher behaupte ich, daß diese zwey Bogen (zeigend) einander gleich seyn. K. Das ist nicht wahr.

L. Warum glaubt ihr dieses nicht? K. Weil nur von zwey gleichen Kreisen ꝛc.

L. Hier in diesem Kreise ist ein gleichseitiges Dreyeck, die Seiten dieses Dreyecks sind Sehnen des Kreises. Nun sagt mir geschwind, wie sich diese drey Bogen (zeigend) zu einander verhalten. K. Sie sind einander gleich.

L. Geschwind beweist mir diese Behauptung durch einen ordentlichen Schluß. K. Alle Bogen eines Kreises, welche gleichen Sehnen zugehören, sind einander gleich, dieses sind ꝛc., folglich ꝛc.

Funf-

Funfzigster Satz.

Lehrsatz mit vorausgeschickten Erklärungen.

L., (welcher Fig. 73. ohne BC und BF verzeichnet hat.) Wenn ich euch sage, daß die Linien CA und CF Halbmesser sind, so könnt ihr mir sagen, was C für ein Punct ist. K. Das muß der Mittelpunct seyn.

L. Was bilden denn die Halbmesser CA und CF? K. Einen Winkel.

L. Und was für ein merkwürdiger Punct ist zugleich der Scheitel dieses Winkels? K. Der Mittelpunct.

L. Wenn ihr mir nun diesen Winkel beschreiben und in dieser Beschreibung angeben wolltet, was ihr sowohl von dem Scheitel als auch von den Schenkeln dieses Winkels wißt, wie würdet ihr da sprechen? K. Das ist ein Winkel, dessen Scheitel der Mittelpunct eines Kreises ist, und dessen Schenkel Halbmesser sind.

L. Die Beschreibung wäre richtig. Paßte sie aber wohl auch auf diesen Winkel (einen Winkel verzeichnend, dessen Spitze am Mittelpuncte liegt, dessen Schenkel aber nicht bis an die Peripherie reichen)? K. Nein.

L. Warum denn nicht? Sein Scheitel ist ja auch der Mittelpunct dieses Kreises? K. Aber seine Schenkel sind keine Halbmesser, weil sie nicht bis an die Peripherie reichen.

L. Recht! Nun merkt: ein Winkel welcher die

Merkmahle hat, die ihr erst von dem Winkel ACF (Fig. 73.) angegeben habt, heißt ein Winkel am Mittelpuncte. August soll mir jetzt geschwind einen Winkel am Mittelpuncte verzeichnen. K. (thut dieß.)

L., (welcher Fig. 74. verzeichnet hat.) Kann wohl dieser Winkel auch Winkel am Mittelpuncte heißen? K. Nein.

L. Warum denn nicht? K. Weil ꝛc.

L. Könnt ihr mir denn nicht sagen, wo die Spitze dieses Winkels liegt? K. An der Peripherie.

L. Und wo endigen sich seine Schenkel? K. Ebenfalls an der Peripherie.

L. Nun faßt diese zwey Merkmahle zusammen und beschreibt mir damit diesen Winkel. K. Das ist ein Winkel, dessen Spitze an der Peripherie liegt, und dessen Schenkel sich an der Peripherie (eben daselbst) endigen.

L. Winkel, an denen sich diese zwey Merkmahle befinden, nennt man Winkel an der Peripherie. Ich will sehen, ob Theodor geschwind einen solchen Winkel (einen Winkel an der Peripherie) verzeichnen kann. K. (verzeichnet.)

L. So wohl die Schenkel eines Mittelpuncts- als eines Peripheriewinkels schneiden vom Umfange des Kreises einen Bogen ab, der zwischen ihnen (den Schenkeln) liegt. Von diesem Bogen sagt man nun: es ist der Bogen, worauf ein solcher Winkel steht. Der Winkel o (Fig. 73.) steht dem

demnach — nun auf welchem Bogen? K. Auf dem Bogen AF.

L. Und auf welchem Bogen steht der Winkel F hier (Fig. 74.)? K. Auf dem Bogen GH.

L. Nun werdet ihr mich verstehen, wenn ich von einem Mittelpuncts- oder Peripheriewinkel, und von dem Bogen, worauf ein solcher Winkel steht, spreche. Jetzt will ich sehen, ob ihr genau nach meinen Befehlen handeln und die Figur hervorbringen könnt, die ich im Sinne habe. Verlängert den Schenkel A C (Fig. 73.) bis an die Peripherie. K. (ziehen C B.)

L. Nun ziehet noch eine Linie und bildet dadurch mit der Linie A B einen Winkel, der aber gerade auf dem nämlichen Bogen steht, auf welchem der Winkel o steht. K. (denken nach und versuchen, bis sie darauf kommen B F zu ziehen.)

L. Jetzt ist die Figur vorhanden, die ich im Sinne hatte. Wie wir den Winkel o vorhin nannten, wißt ihr gewiß noch, wer sagt mir aber, wie wir den Winkel B nennen können? K. Einen Peripheriewinkel.

L. Stehen diese zwey Winkel, nämlich o und B auf einerley oder auf zwey verschiedenen Bogen? K. Auf einerley.

L. Dieses Merkmahl gebt mir in eurer Antwort mit an, wenn ich frage: was haben wir hier in o und B für Winkel? K. Einen Peripherie- und einen Mittelpunctswinkel, die beyde auf einerley Bogen stehen.

L. Bey solchen Winkeln giebt es etwas zu untersuchen. Was meynt ihr wohl? K. Vielleicht wie sie sich zu einander verhalten.

L. Richtig! Diese Untersuchung wollen wir auch hier anstellen, um zu erfahren, wie sich der Winkel o zu dem Winkel B verhält. Was ist denn wohl CBF für eine Figur? K. Ein Dreyeck.

L. Ist denn keine Seite dieses Dreyecks verlängert? K. Ey ja, BC ist verlängert?

L. Was muß daher der Mittelpunctswinkel o in Rücksicht auf das Dreyeck mit verlängerter Seite für ein Winkel seyn? K. Ein äußerer.

L. Wie muß sich also o zu den Winkel B und F zusammengenommen verhalten? K. Er muß so groß als diese seyn.

L. Gut! o ist also so groß als B und F vereinigt. Nun sagt mir, was das Dreyeck CBF in Rücksicht auf seine Seiten für ein Dreyeck ist. K. Ein gleichsehenklichtes, weil CB und CF Halbmesser sind.

L. Wie müssen sich denn da die Winkel B und F zu einander verhalten? K. Sie müssen als Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyecks einander gleich seyn.

L. Gesetzt nun, B hätte 36 Grad wie viel Grad hätte ein Winkel, der so groß als B und F zusammengenommen wäre? K. 72.

L. Und wie viel Grad hätte ein Winkel, der doppelt so groß als B wäre? K. Auch 72.

L. Also ist ein Winkel, der so groß als B u. F zusammen genommen ist, doppelt so groß als B.

Nun

Nun ist aber o so groß als B und F zusammengenommen, folglich ist er — nun wie groß gegen B gerechnet? K. Doppelt so groß als B.

L. Jetzt haben wir von einem Mittelpunctswinkel bewiesen, daß er doppelt so groß ist, als ein Peripheriewinkel, der mit ihm auf einerley Bogen steht. Wenn wir nun dieses von jedem Mittelpunctswinkel erweisen könnten, was für einen Satz könnten wir alsdann als ohne Ausnahme wahr aufstellen? K. Diesen: Ein Winkel am Mittelpuncte ist alle Mahl doppelt so groß, als ein Peripheriewinkel, der mit ihm auf einerley Bogen steht.

L. Dieser Satz ist auch wirklich ohne Ausnahme wahr, ob wir gleich seine Wahrheit nur erst für einen einzigen Fall erwiesen haben. Ich sage: für einen einzigen Fall, weil 3 verschiedene Lagen möglich sind, die der Mittelpunct gegen die Schenkel des Peripheriewinkels haben kann, und weil daher die Wahrheit des obigen Satzes für 3 Fälle erwiesen werden muß. Es kann nämlich der Mittelpunct 1) in einem Schenkel, 2) zwischen den Schenkeln und 3) außer den Schenkeln des Winkels an der Peripherie liegen. Diese 3 Fälle sind hier in diesen Zeichnungen (Fig. 73, 75, 76) darstellt. Wer kann mir sagen, was hier (Fig. 73.) der Mittelpunct für eine Lage hat? U. s. w.

Hier (auf Fig. 75. zeigend) so wohl als hier (Fig. 76) läßt sich erweisen, daß der Mittelpunctswinkel doppelt so groß als der Peripheriewinkel ist, der mit ihm auf einerley Bogen steht. Allein bey euch, als Anfängern, übergehe ich die Beweise für

für die 2 letztern Fälle, zu Mahl, da ihr den Beweis für den dritten Fall nicht leicht faßen würdet.

Will man den in Rede stehenden Lehrsatz durch eine sinnliche Anschauung bestätigen, so lege man von Nro. 12. D den Winkel w in den halbirten Winkel x und zeige, daß der erstere die Hälfte des letztern decke.

L. Durch unsere Untersuchung haben wir also gefunden, daß der Winkel o hier (Fig. 73.) doppelt so groß als der Winkel B ist. Wie wolltet ihr euch nun aber aus der Verlegenheit helfen, wenn jemand also spräche: Winkel, die einerley Maß haben, müssen von gleicher Größe seyn, nun haben aber die Winkel o und B einerley Bogen zum Maße, folglich ꝛc.

Die Kinder müssen hier finden, daß die Winkel o und B wohl auf einerley Bogen stehen, aber nicht einerley Maß haben. Denn nur ein Bogen, der aus der Spitze eines Winkels zwischen seinen Schenkeln beschrieben wird, ist dessen Maß. Nun ist aber der Bogen AF nur aus der Spitze des Winkels o, aber nicht auch des Winkels B beschrieben, folglich kann er nicht beyder Winkel Maß seyn.

L. Richtig! So verhält sich die Sache. Wenn ich euch nun jetzt den Auftrag gäbe, mir einen Winkel zu verzeichnen, der halb so groß wäre, als ein gegebener, wie würdet ihr dieß bewerkstelligen, ohne den gegebenen zu halbiren? K. Da dürften wir den gegebenen nur zu einem Winkel am Mittelpuncte machen und alsdann einen an der Peripherie verzeichuen, der mit dem Mittelpunctswinkel auf einerley Bogen stünde.

L. Nun

L. Nun macht es so. Hier ist ein Winkel (einen verzeichnend), macht einen, der halb so groß als dieser ist. K. (thun dieß).

L. Nun gebe ich euch hier einen andern Winkel, mit dem Auftrage, einen zu verzeichnen, der doppelt so groß ist. K. (machen den angegebenen zu einem Peripheriewinkel und verzeichnen dann einen Mittelpunctswinkel, der mit jenem auf einerley Bogen steht.)

L. Seht diese Figur (Fig. 73.) noch Ein Mahl an und sagt, welches Winkels Maß der Bogen AF ist. K. Des Winkels o.

L. Der wie vielste Theil dieses Bogens kann denn das Maß des Winkels B seyn? K. Der halbe.

L. Warum gerade der halbe? K. Weil der Winkel B halb so groß als der Winkel o ist, so so muß auch sein Maß halb so groß als dieses Winkels Maß seyn.

L. Könnt ihr mir wohl sagen, welches das Maß des Winkels C hier (Fig. 75.) ist? K. Der halbe Bogen AB.

L. Richtig! Und welches ist das Maß des Winkels D (Fig. 76.)? K. Der halbe Bogen EF.

L. Aber welches ist jetzt (die Halbmesser in Fig. 75 u. 76 weglöschend) daß Maß dieser Winkel? K. Das Maß des Winkels C ist immer noch der halbe Bogen AB, und das Maß des Winkels D der halbe Bogen EF.

L. Diese Winkel haben also den halben Bogen, worauf sie stehen, zu ihrem Maße. Könnt ihr mir wohl

jetzt sagen, welches überhaupt das Maß eines Winkels an der Peripherie seyn mag? K. Immer der halbe Bogen, worauf er steht.

L. Richtig! Welches mag aber das Maß eines Winkels am Mittelpuncte seyn? K. Der ganze Bogen, worauf er steht.

L. Allerdings! Den bey einem Winkel am Mittelpunct ist ja alle Mahl der Bogen, worauf er steht, aus seiner Spitze beschreiben, welches aber der Fall bey einem Peripheriewinkel nicht ist.

Man zeige hier den Kindern vermittelst des Zirkels an mehrern Zeichnungen, daß die Bogen, die man mit einerley Halbmesser sowohl aus A (fig. 77.) als aus F beschreibt, nicht von einerley Größe sind, sondern daß DE gerade halb so groß, als BC ist, damit sie auch durch diese Anschauung in der Uiberzeugung, daß nicht der ganze Bogen BC (fig. 77.) das Maß des Winkels A seyn könne, bestärkt werden.

L. Gesetzt nun, der Bogen worauf ein Peripheriewinkel steht, hätte 80 Grad, wie viel Grade hätte denn dieser Winkel? K. 40. U. s. w.

L. Wißt ihr denn noch wie viel Grade eine halbe Kreislinie hat? K. 180.

L. Wenn nun die Schenkel eines Peripheriewinkels auf den Endpuncten eines Durchmessers oder, welches eben so viel ist, auf einer halben Peripherie stünden, indem jeder Durchmesser die Peripherie in zwey gleiche Theile theilet, wie viel Grad hätte dann dieser Winkel? K. 90.

L. Und

L. Und was für ein Winkel wäre dieß? K. Ein rechter.

L. Richtig! Hier (Fig. 78.) ist ein Peripheriewinkel, welcher auf den Endpuncten eines Durchmessers oder auf einer halben Peripherie steht; was könnt ihr nun von diesem Winkel behaupten? K. Daß er ein rechter seyn müsse.

L. Recht! Meynt ihr wohl, daß nur der hier (Fig. 78.) auf einer halben Kreislinie stehende, oder jeder andere Peripheriewinkel, der auf einem solchen Bogen steht, ein rechter seyn müsse? K. Wir glauben, daß jedere andere ꝛc.

L. Natürlich. Denn ein solcher Winkel hat ja immer den vierten Theil einer Kreislinie, d. h. einen Bogen von 90 Grad zu seinem Maße. Nun könnt ihr mit sehr leichter Mühe, und ohne daß ihr nöthig habt, auf die oben gelernte Art eine senkrechte Linie zu ziehen, einen rechten Winkel verzeichnen. Wer sagt mir, wie? K. Man darf ja nur einen Kreis beschreiben, darin den Durchmesser ziehen und die Schenkel eines Peripheriewinkels auf seine Endpuncte stellen.

L. Nun beschreibe mir einmahl jeder einen rechten Winkel auf diese Art. K. (beschreiben.) *)

L. Wenn nun ein Peripheriewinkel auf einen größern Bogen stünde, als die halbe Kreislinie ist, was

*) Bey dieser Gelegenheit zeige man den Kindern, wie man durch Hülfe eines solchen auf einer halben Peripherie stehenden Peripheriewinkels einen Winkelhaken am besten probiren könne.

was würde es denn für ein Winkel seyn? K. Ein stumpfer.

L. Warum glaubt ihr dieses? K. Weil die Hälfte eines Bogens, der mehr als die halbe Kreislinie beträgt, auch mehr als 90 Grad halten muß, und ein Winkel, der mehr als 90 Grad hält, ein stumpfer ist.

L. Gesetzt aber, ein Bogen, worauf ein Peripheriewinkel stünde, wäre kleiner als eine halbe Kreislinie, was wäre denn dieses für ein Winkel? K. Ein spitziger.

L. Was habt ihr für einen Grund, dieses zu behaupten? K. Ist ein Bogen kleiner als eine halbe Kreislinie, so hat auch die Hälfte von ihm weniger als 90 Grad, und ein Winkel der weniger als 90 Grad hat, ist ja ein spitziger.

Man verzeichne Figuren, wie 79 und 80, und frage: was ist dieß für ein Winkel? und lasse die Kinder die Gründe angeben, warum sie den einen Winkel für spitzig, den andern für stumpf halten.

L. Wer ist wohl im Stande, mir in einem Kreise zwey verschiedene Peripheriewinkel zu verzeichnen, die auf einerley Bogen stehen. K. (verzeichnen eine Figur, wie etwa Fig. 81.)

L. Wer sagt mir denn, was ihr jetzt gethan habt? K. Wir haben ꝛc.

L. Wer sagt mir aber geschwind, wie sich diese zwey Winkel (A und B Fig. 81.) zu einander verhalten müssen? K. Diese müssen einander gleich seyn.

L. Wie

L. Wie könnt ihr dieses sogleich wissen? K. Weil beyde auf einerley Bogen stehen, dessen Hälfte eines jeden Maß ist, und Winkel, die einerley Maß haben, gleich groß sind.

L. Gut! Wie würden sich aber ein Paar Peripheriewinkel zu einander verhalten, die auf verschiednen, aber doch gleichen Bogen eines Kreises stünden. K. Diese würden auch einander gleich seyn.

L. Richtig! Denn ihre Maße wären ja auch gleich, da, wie ihr wißt, die Hälften sich wie die Ganzen zu einander verhalten. Wir können daher von allen Peripheriewinkeln, die auf gleichen Bogen stehen, behaupten — nun was? K. Daß sie einander gleich seyn.

L. Wie müssen sich aber wohl die Bogen zu einander verhalten, auf denen ein Paar gleiche Peripheriewinkel stehen? K. Diese müssen auch einander gleich seyn.

L. Ihr denkt wohl: gleiche Winkel müssen gleiche Maße haben? Aber die Bogen, worauf die Peripheriewinkel stehen, sind ja nicht die Maße dieser Winkel. K. Aber doch die Hälften dieser Bogen sind ihre Maße. Sind aber die Hälften gleich, so müssen auch die Ganzen gleich seyn.

L. Das ist richtig!

Einundfunfzigster Satz.

Aufgabe.

L. Hier (Fig. 82.) ist eine gerade Linie AB, an der wir nach unsern Regeln einige Veränderungen vornehmen wollen, um etwas Neues zu lernen. Was sollen wir nach der zweyten unserer Regeln thun? K. Eine gerade Linie ꝛc.

L. Hier wollen wir ein beliebiges Stück abschneiden. Bemerkt daher irgendwo auf der Linie AB einen Punct, wo wir uns ein Stück abgeschnitten vorstellen können. K. (bemerken den Punct C.)

L. Damit wir von den Puncten A und C gerade Linien ziehen können, wollen wir uns noch einen dritten Punct verschaffen und deßhalb über AC in gleicher Entfernung von A und C Bogen, die sich schneiden, beschreiben. K. (beschreiben mit einerley Oeffnung des Zirkels aus A und C die Bogen x.

L. Nun haben wir in dem Durchschnittspuncte dieser Bogen einen neuen Punct erhalten, so daß wir unsere erste Regel befolgen können. Was müssen wir nach dieser jetzt thun? K. Von dem Durchschnittspuncte x gerade Linien nach A u. C. ziehen.

L. Thut dieß, und sagt, was wir dadurch für eine Figur bekommen. K. (ziehen xA und xC und sprechen:) da bekommen wir ein gleichschenklichtes Dreyeck mit einem äußern Winkel.

L. Drey-

L. Dreyecke mit einem äußern Winkel haben wir schon betrachtet, daher wir, um auf etwas Neues zu kommen, mit dieser Figur noch einige Veränderungen vornehmen müssen. Wir wollen unsere zweyte Regel erst noch Ein Mahl befolgen und die Linie Cx verlängern, das angesetzte Stück aber so groß als Cx machen. Thut dieses. K. (ziehen x y.)

L. Nun sind uns hier verschiedene Puncte gegeben, die wir nach unserer ersten Regel durch gerade Linien verbinden müssen. Was sind das für Puncte? K. y, A, B.

L. Wir wollen nur von y nach A eine gerade Linie ziehen. — So! Und nun wollen wir auch noch mit dem Halbmesser Ax aus dem Puncte x einen Kreis beschreiben. — Jetzt sagt mir, was die Cy in Rücksicht auf den Kreis für einen Namen führt. K. Den Namen Durchmesser.

L. Findet ihr hier keinen Peripheriewinkel der etwa auf den Endpuncten eines Durchmessers stünde? K. Ey ja, der Winkel y A C ist ein solcher.

L. Was muß demnach der Winkel y A C für ein Winkel seyn? K. Ein rechter.

L. Wie lautet der vollständige Schluß, den ihr jetzt in euren Gedanken gemacht habt? K. Jeder Peripheriewinkel, der auf den Endpuncten eines Durchmessers steht, ist ein rechter Winkel, dieser Winkel hier ꝛc. folglich ꝛc.

L. Das ist recht! Wie muß denn nun die Linie y A auf den Endpuncte der gegebenen Linie AB stehen? K. Senkrecht.

L. Warum glaubt ihr dieses? K. Weil ein rechter Winkel nur entstehen kann, wenn eine Linie auf einer andern senkrecht steht.

L. Gesetzt nun, es hätte uns jemand den Auftrag gegeben, eine Linie auf den gegebenen Endpunct A der Linie A B senkrecht zu stellen, und wir hätten gethan, was wir jetzt nach und nach wirklich gethan haben, hätten wir denn da seinen Auftrag richtig vollzogen? K. Ja wohl.

L. Da hätten wir also die Aufgabe: an einen gegebenen Endpunct einer geraden Linie eine senkrechte Linie zu ziehen, aufgelöst. Wer sagt mir, wie wir dieses gemacht haben? K. Erstlich haben wir auf der gegebenen Linie A B einen beliebigen Punct C angenommen, alsdann haben wir über A C ein gleichschenklichtes Dreyeck beschrieben, hierauf haben wir die dem gegebenen Puncte gegenüberstehende*) Seite C x verlängert und das angesetzte Stück x y so groß als C x gemacht, sodann haben wir von y nach A eine gerade Linie gezogen und endlich haben wir mit dem Halbmesser A x einen Kreis aus x beschrieben.

Diese Beschreibung des vorhin beobachteten Verfahrens wird von mehrern Kindern so lange wiederhohlt, bis sie sie ohne Fehler machen können.

L. Nun beweist mir auch, daß die Linie y A auf

*) Diese nähere Bestimmung der zu verlängernden Seite setzen die Kinder für sich nicht hinzu. Der Kürze wegen habe ich sie ihnen gleich in den Mund gelegt.

auf dem Endpuncte A der Linie AB senkrecht steht. K. A ist ein Peripheriewinkel, welcher auf der halben Kreislinie steht, folglich ꝛc.

L. Nun sollt ihr euch eine Zeitlang in der Auflösung der Aufgabe: an einen gegebenen Endpunct ꝛc. üben. Ihr könnt hiebey sowohl den Kreis als auch die Linie Ax weglassen. Denn den Kreis brauchen wir bloß zum Beweise der Richtigkeit unsers Verfahrens, und von der Linie Ax brauchen wir bloß den Endpunct x, um der Linie Cy die gehörige Richtung geben zu können.

Uibung!

Zweyundfunfzigster Satz.

Aufgabe mit vorausgeschickten Erklärungen.

L., (welcher Fig. 83. ohne die punctirten Linien und Fig. 84. verzeichnet hat.) In jedem dieser Kreise seht ihr eine geradlinigte Figur und zwar ein Viereck verzeichnet, ohne daß man jedoch sagen könnte: diese Zeichnung (auf Fig. 83. zeigend) stimmt in allen Stücken mit dieser hier (Fig. 84.) überein. Wißt ihr wohl, warum man dieses nicht sagen kann? K. Weil hier (Fig. 83.) die Winkelspitzen des Vierecks in der Peripherie liegen, (weil hier Fig. 83.) die Seiten des Vierecks Sehnen des Kreises sind), welches aber der Fall bey der andern Figur (Fig. 84.) nicht ist.

L. Um des jetzt an diesem Vierecke (Fig. 83.) bemerkten Merkmahls willen sagt man: dieses Viereck ist in den Kreis beschrieben. Wenn ihr jetzt auf meine Worte recht Achtung gegeben habt, so könnt ihr mir gewiß sagen, ob man auch von diesem Vierecke (Fig. 84.) behaupten könne, daß es in den Kreis beschrieben sey. K. Von diesem Vierecke kann man das nicht behaupten.

L. Warum nicht? K. Weil seine Winkelspitzen nicht in der Peripherie des Kreises liegen (seine Seiten keine Sehnen des Kreises sind).

L. Das ist recht! Hier (Fig. 85.) habe ich abermahls einen Kreis und ein Sechseck verzeichnet. Sollte ich wohl von dem letztern auch sagen können: es ist in den Kreis beschrieben? K. Ja.

L. Warum kann ich hier diesen Ausdruck gebrauchen? K. Weil auch die Winkelspitzen dieses Sechsecks in der Peripherie liegen (oder seine Seiten Sehnen des Kreises sind.)

L. Richtig! Nun merkt! Man sagt überhaupt von einer geradlinigten Figur, daß sie in einen Kreis, oder auch, daß der Kreis um sie beschrieben sey, wenn alle ihre Winkelspitzen in der Peripherie des Kreises liegen, also auch alle ihre Seiten Sehnen des Kreises sind. — — Jetzt beschreibt mir einen Kreis und zieht darin einen Durchmesser oder die größte Sehne. Denn — das merkt bey dieser Gelegenheit — der Durchmesser ist alle Mahl die größte Sehne eines Kreises. K. (beschreiben den Kreis Fig. 83. und ziehen blos AB.)

L. Nun

L. Nun zieht einen zweyten Durchmesser, der den ersten schneidet, doch so, daß alle dadurch entstehende Winkel rechte Winkel werden. Dieß geschieht, wenn ihr auf den Mittelpunct des erst gezogenen Durchmessers eine senkrechte Linie errichtet und diese auf beyden Seiten bis an die Peripherie verlängert. K. (ziehen CD.)

L. Könnt ihr mir wohl sagen, welcher von den vier Winkeln m, n, o, p der größte ist. K. Es ist einer so groß als der andere.

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil alle vier rechte Winkel sind, und alle rechte Winkel einerley Größe haben.

L. Jeder dieser Winkel ist, wie ihr seht, ein Winkel am Mittelpuncte und stehet auf einem Bogen, der sein Maß ist. Nun sagt mir, welcher von den vier Bogen hier CB, BD, DA, AC der größte ist. K. Sie sind einander gleich.

L. Aber wie könnt ihr dieses wissen, da ihr sie nicht gemessen habt? K. Weil die Winkel, die auf ihnen stehen, gleich sind, so müssen sie auch selbst einander gleich seyn. Denn gleiche Winkel haben ja auch gleiche Maße.

L. Das ist richtig! Wir haben also jetzt diese Kreislinie in vier gleiche Theile getheilt. Wenn ihr nun jemanden sagen solltet, wie man eine Kreislinie in vier gleiche Theile theilet, wie würdet ihr da sprechen? K. Um eine Kreislinie in vier gleiche Theile zu theilen, darf man nur zwey Durchmesser ziehen, die einander so schneiden, daß

 sie

sie lauter rechte Winkel bilden (die einander recht winklicht schneiden).

L. Nun wollen wir doch zu jedem dieser gleichen Bogen eine Sehne ziehen. — Ist wohl eine von diesen Sehnen größer als die übrigen? K. Nein.

L. Woher kann man dieses gleich wissen? K. Daher, weil zu gleichen Bogen gleiche Sehnen gehören.

L. Da haben wir also jetzt ein Viereck, das lauter gleiche Seiten hat. Wenn wir nun noch herausbringen könnten, daß es vier rechte Winkel hätte, wie könnten wir es dann nennen? K. Quadrat.

L. Ich will hier die Winkel y und x vereinigen, indem ich ein Stückchen von dem Durchmesser CD weglösche. — So! Jetzt sinnt nach und seht, ob ihr nicht herausbringt, was der Winkel C für ein Winkel seyn muß. K. Ey! der muß ein rechter Winkel seyn, weil es ein Peripheriewinkel ist, der auf den Endpuncten eines Durchmessers oder auf einer halben Peripherie steht.

L. Das ist richtig! Nunmehr werdet ihr mir wohl auch sagen können, was die Winkel A, D u. B, wovon jeder in 2 Theile getheilt ist, die ihr euch aber vereinigt denken müßt, für Winkel seyn müssen. K. Jeder muß auch ein rechter seyn, weil jeder auf einer halben Kreislinie steht.

L. Gut! Und unser in den Kreis beschriebenes Viereck ist also —? K. Ein Quadrat.

L. Da haben wir also die Aufgabe: ein Quadrat in einen Kreis zu beschreiben, gelöst. Wer sagt mir nun wieder, wie wir dieses bewerkstelligt haben. K. (beschreiben das Verfahren.)

L. Aber wer beweist mir jetzt, daß die hier in diesem Kreise (Fig. 83.) verzeichnete Figur ein Quadrat ist. K. (beweisen dieses).

L. Nun soll mir jeder von euch einige Quadrate, jedes derselben aber in einen Kreis beschreiben. — —

L. Wie eine Sehne und der zu ihr gehörige Bogen halbirt werden, habt ihr neulich gelernt. Ihr werdet mir daher die 4 Sehnen hier (Fig. 83.) und die ihnen zugehörigen Bogen leicht halbiren können. Wer getraut sich dieses zu thun? K. (halbiren die Sehnen und Bogen Fig. 83.)

L. Jetzt haben wir hier statt 4 acht gleiche Bogen, indem wir die Viertel durch Halbiren zu Achteln gemacht haben. Um Verwirrung zu verhindern, will ich das Quadrat jetzt weglöschen und dafür zu jedem der jetzt vorhandenen 8 Bogen eine Sehne ziehen (aus Fig. 83. Fig. 86. machend). Könnt ihr mir wohl sagen, ob diese Sehnen von verschiedener, oder von einerley Größe sind. K. Sie sind alle von einerley Größe, weil sie alle gleichen Bogen zugehören.

L. Je 2 und 2 dieser Sehnen bilden einen Peripheriewinkel, so daß wir also auch 8 Peripheriewinkel hier haben. Nun untersucht einmahl und seht, wie viel Achtel von der ganzen Kreislinie jeder Bogen, worauf ein solcher Peripheriewinkel

 steht,

steht, in sich faßt. K. Jeder faßt 6 Achtel von der Kreislinie in sich.

L. Da sind also die Bogen, worauf diese Peripheriewinkel stehen, alle einander gleich. Können nun diese Winkel selbst von verschiedener Größe seyn? K. Nein.

L. Also haben sie einerley Größe oder sind einander gleich. Könnt ihr mir dieses wohl durch einen vollständigen Schluß beweisen? K. Alle Peripheriewinkel, die auf gleichen Bogen stehen, sind einander gleich, dieß hier sind ꝛc. folglich ꝛc.

L. Gut! Jetzt sagt mir, was wir dieser Figur (die Kreislinie weglöschend), die, wie ihr seht, 8 Ecken oder Winkel hat, wohl für einen Namen geben können. K. Achteck.

L. Wißt ihr wohl noch, wenn man eine Figur regulär nennt? K. Wenn sie lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat.

L. Ist denn wohl dieses Achteck regulär? K. Allerdings.

L. Da hätten wir also vorhin ein reguläres Achteck in einen Kreis beschrieben. Wer kann dieses wohl noch Ein Mahl thun und aufs neue ein reguläres Achteck in einen Kreis beschreiben? K. Ich ꝛc.

L. So thue es. Theodor soll dir aber das ganze hiebey zu beobachtende Verfahren nach und nach versagen. K. (thun das Befohlne.)

Uibung!

Nun zeige man den Kindern, wie man durch wiederhohltes Halbiren der Sehnen und Bogen ein Sechzehneck, ein

ein Zweyunddreyßigeck rc. in einen Kreis beschreiben könne.

Dreyundfünfzigster Satz.

Aufgabe.

L., (der einen Kreis verzeichnet hat.) Seht, hier habe ich den Halbmesser dieses Kreises zwischen die Schenkel dieses Zirkels gefaßt, d. h. zwischen den Spitzen dieses Zirkels können wir uns eine gerade Linie denken, welche gerade so lang als dieses Kreises Halbmesser ist. Nun will ich sehen, wie oft ich diesen Halbmesser an der Peripherie des damit beschriebenen Kreises herumtragen kann (die Sehnen Fig. 85. ziehend). Da seht ihr, daß ich den Halbmesser dieses Kreises gerade sechsmahl an der Peripherie herum oder in den Kreis eintragen konnte. Man sagt nämlich von einer geraden Linie, daß sie in einen Kreis eingetragen sey, wenn sie ihre Endpuncte in der Peripherie hat. Und da jede dieser sechs Linien so lang als der Halbmesser dieses Kreises ist und ihre Endpuncte in der Peripherie desselben hat, so sagt man: der Halbmesser dieses Kreises ist sechsmahl an der Peripherie herumgetragen worden. Was ich nun bey diesem Kreise mit seinem Halbmesser thun konnte, das kann man bey jedem Kreise, er mag so klein oder so groß seyn, als er will, mit seinem Halbmesser thun. Wenn ich also frage: wie oft kann man den Halbmesser eines Krei-

Kreises an seiner Peripherie herumtragen? so werdet ihr antworten —? K. Sechs Mahl *).

L. Hier (Fig. 85.) ist also der Halbmesser sechs Mahl an der Peripherie herumgetragen. Was bilden denn nun diese sechs geraden Linien (Sehnen) für eine Figur? K. Ein Sechseck.

L. Was für Merkmahle müßte dieses Sechseck haben, wenn wir es ein reguläres Sechseck nennen wollten? K. Es müßte lauter gleiche Seiten und Winkel haben.

L. Stellt

*) Für den, der den Beweis, daß die Seite eines regulären Sechsecks so groß als der Halbmesser desjenigen Kreises ist, in dem man es beschrieben hat, bey der Hand haben will, setze ich ihn hieher.

Es sey (fig. 85.) BD die Seite eines regulären Sechsecks und CB ein Halbmesser, so ist CB = BD.

Bew. In dem Dreyecke DCB muß der Winkel am Mittelpuncte, nämlich DCB 60 Grad haben, weil der 6te Theil der Kreislinie, nämlich der Bogen BD sein Maß und $\frac{360}{6} = 60$ ist. Da nun die 3 Winkel eines Triangels zusammengenommen 180 Grad betragen; so müssen die Winkel B und D im Dreyecke DCB zusammen 120 Grad haben. Diese 2 Winkel sind aber einander gleich, weil CD und CB Halbmesser eines Kreises sind, das Dreyeck DCB also gleichschenklicht ist, folglich muß sowohl der Winkel CBD als CDB 60 Grad haben. Ein Dreyeck aber, in welchem jeder Winkel 60 Grad hält, ist gleichseitig, folglich ist das Dreyeck DCB gleichseitig, also die Seite CB = BD.

L. Stellt doch eine Untersuchung an, um zu erfahren, ob diese Merkmahle an diesem Sechsecke befindlich sind oder nicht. K. Die Seiten sind alle einander gleich, da ja jede dem Halbmesser dieses Kreises gleich ist, und jeder seiner Winkel ist ein Peripheriewinkel der auf einem Bogen steht, welcher $\frac{4}{6}$ der ganzen Kreislinie in sich faßt, es müssen daher auch die Winkel alle einander gleich, folglich dieses Sechseck regulär seyn.

L. Wenn ich nun den Auftrag gäbe, ein reguläres Sechseck in einen Kreis zu beschreiben, was dürftet ihr da nur thun, um diese Figur zu erhalten? K. Da dürften wir nur erst einen Kreis beschreiben und dann seinen Halbmesser sechs Mahl an seiner Peripherie herumtragen.

L. Nun beschreibe mir jeder einige reguläre Sechsecke auf die erst angegebene Art. K. (thun dieß.)

Jetzt zeige man den Kindern, 1) wie man ein reguläres (gleichseitiges) Dreyeck in einem Kreise beschreiben könne, wenn man erst die Peripherie in 6 gleiche Theile theilt und dann vom 1ten zum 3ten, vom 3ten zum 5ten und von diesem zum ersten Theilungspuncte gerade Linien zieht. 2) Wie durch das Halbiren der Bogen die zu den Seiten eines Sechsecks gehören und durch das Ziehen neuer Sehnen ein Zwölfeck und so durch wiederhohltes Halbiren ein Vierundzwanzigeck rc. entstehe.

L. Ihr wißt nun, wie man eine Kreislinie geometrisch in 4, 8, 16 rc., dann in 6, 3,

12, 24 rc. gleiche Theile theilen, und wie man daher auch ein reguläres Vier- Sechs- Acht- Zwölftel rc. in einem Kreise beschreiben kann. Könnten wir die Kreislinie in jede beliebige Anzahl gleicher Theile geometrisch theilen, so wäre es leicht, ein reguläres Vieleck (Polygon) von jeder beliebigen Seitenzahl in den Kreis zu beschreiben. Dieß ist aber nicht möglich. Denn z. B. in 7, 13, 17 rc. gleiche Theile können wir die Kreislinie geometrisch nicht zerlegen, und daher können wir auch kein reguläres Siebeneck rc. geometrisch in dem Kreis beschreiben. Will man gleichwohl eine solche Figur beschreiben, so muß man zu Rechnungen und zum Transporteur seine Zuflucht nehmen, sie also mechanisch beschreiben. Wie dieses geschieht, will ich euch an einem Beyspiele zeigen. Hier (Fig. 87.) ist ein Kreis, in welchen ein reguläres Neuneck beschrieben werden soll. Da nun die Kreislinie nicht geometrisch in neun gleiche Theile getheilt werden kann, so dividire ich 360 als die Gradezahl der ganzen Kreislinie mit 9, wodurch ich 40 zum Quotienten bekomme, und also erfahre, daß der neunte Theil einer Kreislinie 40 Grad hat. Wo aber hier in dieser Kreislinie (Fig. 87.) ein Bogen von 40 Grad anfängt oder aufhört, erfahre ich dadurch immer noch nicht, daher ich die Kreislinie nicht in Neuntel theilen kann. Um dieß thun zu können, muß ich mit Hülfe des Transporteurs einen Winkel von 40 Grad an den Mittelpunct tragen und seine Schenkel bis an die Peripherie verlängern. — So! Der Winkel x muß nun, wenn ich alles recht accurat gemacht habe, 40 Grad, folglich der

Bogen,

Bogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt, eben so viel Grad haben. Nun weiß ich wie groß hier von dieser Kreislinie ein Bogen von 40 Grad ist. Mit Hülfe des Zirkels schneide ich nun, wie ihr seht, die noch fehlenden 8 Bogen von der Größe des Bogens AB gar ab, ziehe zu jedem eine Sehne und vollende so mein reguläres Neuneck.

Die Geschicklichkeit, reguläre Polygone zu verzeichnen, müssen sich vorzüglich diejenigen Kinder erwerben, welche Maurer, Schreiner, oder Gärtner werden wollen, weil man oft Gartenhäuser oder Sääle, Tische, Abtheilungen in Lustgärten ꝛc., welche regulär sechs- acht-eckig ꝛc. sind, verfertigen läßt.

Vierundfunfzigster Satz

Lehrsatz nebst einem Zusatze.

L., (welcher Fig. 85 ohne die punctirten Linien verzeichnet hat.) In dieser Figur die ein reguläres Sechseck, in einen Kreis beschrieben darstellt, ist uns außer den Spitzen der Winkel am Umkreise auch der Mittelpunct gegeben. Können wir da wohl keine unserer Regeln anwenden? K. Ja, die erste.

L. Welche Puncte können wir denn durch gerade Linien mit einander verbinden? K. Den Mittelpunct und den Scheitel eines dieser Winkel.

L. Wir wollen dieses thun und die Linie AC ziehen. Was für einen Namen muß wohl diese Linie führen? K. Den Namen Halbmesser.

L. Was

L. Was ist denn wohl durch Ziehung dieses Halbmessers für eine Veränderung mit dem Winkel A vorgegangen? K. Er ist in 2 Theile getheilt worden.

L. Und dadurch haben wir Veranlassung zu einer neuen Untersuchung bekommen. Wer kann wohl vermuthen, was wir allenfalls hier untersuchen könnten? K. Vielleicht, wie sich der Winkel x zu dem Winkel y verhält.

L. Richtig! das ist hier zu untersuchen. Um aber diese Untersuchung anstellen zu können, müssen wir unsere erste Regel noch einige Mahle anwenden und die Hülfslinien E C und B C ziehen. — Jetzt haben wir ein Paar euch schon bekannte Figuren erhalten, die wir, wie ihr wißt, mit einander vergleichen müssen, um zu sehen — ? K. Ob sie einander gleich und ähnlich sind oder nicht.

L. Untersucht dieses einmahl. K. (kommen leicht darauf, daß

C B = C E } weil es Halbmesser sind;
C A = C A }
E A = A B weil es Seiten eines regulären Sechsecks sind, folgl.

$\triangle$ C E A $\cong$ $\triangle$ C A B).

L. Gut! Diese 2 Dreyecke sind einander gleich und ähnlich, und wenn wir das Dreyeck E C A so (man zeige dieß mit 2 Dreyecken Nro. 14.) herüber legen könnten, daß E C auf B C zu liegen käme, so würden beyde einander decken. Wißt ihr denn noch, wie sich in 2 gleichen und ähnlichen Dreyecken die Winkel zu einander verhalten, die gleichen Seiten

ten gegenüberstehen? K. Diese sind einander gleich.

L. Wie müssen sich demnach die Winkel x und y zu einander verhalten? K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Warum? Weil ꝛc.

L. Jetzt will ich die Linien CE, AC und CB wieder weglöschen — Könnt ihr mir wohl sagen, was ich nur thun dürfte, wenn ich denn Winkel A halbiren wollte? K. Da dürften Sie nur von dem Mittelpuncte dieses Kreises eine gerade Linie in die Spitze des Winkels A ziehen.

L. Aber was müßte ich thun, wenn ich jeden Winkel dieses regulären Sechsecks halbiren wollte? K. Da müßten Sie von dem Mittelpuncte C in die Spitze eines jeden eine gerade Linie ziehen.

L. Also so (die sechs Halbmesser ziehend)? K. Ja.

L. Ihr habt Recht! Denn von jedem dieser Winkel läßt sich wie vorhin von dem Winkel A erweisen, daß er durch den gezogenen Halbmesser halbirt worden ist. Jetzt sagt mir, was bewirkt wird, wenn man in die Spitzen eines regulären Sechsecks die Halbmesser des Kreises zieht, worein es beschrieben ist. K. Da werden die Winkel halbirt.

L. Sagt mir das, was ihr jetzt gelernt habt, in einem vollständigen Satze. K. Wenn man in die Spitzen eines regulären Sechsecks die Halbmesser des Kreises zieht, worein es beschrieben ist, so werden dadurch die Winkel halbirt.

 L. Nun

L. Nun wollen wir doch einmahl in eine Spitze dieses regulären Achtecks (Fig 86.) einen Halbmesser des Kreises, worein es beschrieben ist ziehen und sehen, ob wir nicht auch beweisen können, daß der Winkel dadurch halbirt werde.

Man lasse jetzt, wie vorhin beym Sechsecke, die Kinder beweisen, daß auch der Winkel des regulären Achtecks durch den Halbmesser des Kreises, worein es beschrieben ist, halbirt werde.

L. So wie wir auch von den Winkeln eines regulären Achtecks erweisen konnten, daß ꝛc. so können wir dieses von den Winkeln eines jeden regulären Polygons beweisen, daher können wir das, was ihr vorhin von den Winkeln dieses regulären Sechsecks behauptet habt, auf die Winkel eines jeden regulären Polygons ausdehnen, und daher als einen Lehrsatz aufstellen — nun! welchen Satz? K. Wenn man in die Spitzen eines regulären Polygons die Halbmesser des Kreises zieht, worein es beschrieben ist, so werden dadurch die Winkel desselben halbirt.

L. Hier (irgend ein reguläres Polygon in einen Kreis beschreibend) ist ein reguläres Polygon. Was müßt ihr nun thun, um seine Winkel zu halbiren? K. Wir müssen ꝛc.

L. Nun beschreibe sich jeder ein Sechseck in einen Kreis und halbire seine Winkel. Carl aber soll dieses hier an der Tafel thun. — —

L. Durch

L. Durch das Ziehen dieser Halbmesser in die Spitzen dieses Sechsecks haben wir es in andere Figuren zerlegt. In was für Figuren? K. In Dreyecke.

L. Wie sich die Dreyecke CEA (Fig. 85.) und CAB zu einander verhalten, haben wir vorhin schon gefunden. Solltet ihr wohl nicht herausbringen können, wie sich die Dreyecke CAB und CBD zu einander verhalten? K. (beweisen wie vorhin, daß beyde einander gleich und ähnlich sind.)

L. Auf diese Weise läßt sich von allen diesen Dreyecken beweisen, daß sie einander gleich und ähnlich seyn müssen. Hier habe ich ein reguläres Fünfeck in einen Kreis beschrieben. Ziehet jetzt in die Spitzen desselben die Halbmesser des Kreises, worein es beschrieben ist. K. (ziehen.)

L. In was für Figuren wurde denn jetzt dieses Fünfeck zerlegt. K. Auch in Dreyecke.

L. Solltet ihr wohl nicht herausbringen können, wie sich diese Dreyecke zu einander verhalten? K. (finden wie vorhin, daß sie alle einander gleich und ähnlich seyn müssen.)

Man lasse noch einige reguläre Polygone auf die angegebene Art in Dreyecke zerlegen.

L. Jetzt sagt mir, wie wir es gemacht haben, als wir verschiedene reguläre Polygone in gleiche Dreyecke zerlegten. K. Da haben wir in ihre Spitzen die Halbmesser der Kreise, worein sie beschrieben waren, gezogen.

L. Was jetzt bey einigen regulären Polygonen geschehen ist, das geschieht bey allen Figuren dieses Namens, nämlich bey allen regulären Polygonen. Jedes derselben, es mag so viel Seiten haben als es will, wird in lauter gleiche Triangel zerlegt, wenn man in alle seine Spitzen die Halbmesser der Kreise zieht, worein sie beschrieben sind. Und zwar entstehen dadurch immer gerade so viel Triangel, als es (das Polygon) Seiten hat. Denn seht, hier dieses Sechseck hat sechs, dieses Fünfeck fünf Triangel gegeben, u. s. w.

L. Wer kann mir nun sagen, wie man am geschwindesten zwölf gleiche Triangel verzeichnen kann. K. Wenn man ein Zwölfeck in einen Kreis beschreibt und dann in alle seine Ecken Halbmesser dieses Kreises zieht.

L. Und wie könnte man am geschwindesten sechs gleiche Triangel verzeichnen? U. s. w.

L. Jetzt merkt noch ein Paar Ausdrücke mit ihren Bedeutungen. Derjenige Winkel am Mittelpuncte, dessen Schenkel auf den Endpuncten der Seite eines Polygons stehen, heißt der Centriwinkel und derjenige Winkel, welchen zwey Seiten eines Vielecks mit einander machen, heißt Polygonwinkel. Jetzt nennt mir einmahl hier (Fig. 85.) alle Polygonwinkel. K. A, B, D 2c.

L. Warum nennt ihr diese Winkel Polygonwinkel? K. Weil jeder derselben von zwey Seiten eines Polygons gebildet wird.

L. Ist denn wohl y oder x auch ein Polygonwinkel? K. Nein.

L. Warum

L. Warum nicht? K. Weil jeder derselben von einem Halbmesser und einer Seite, nicht aber von zwey Seiten eines Polygons gebildet wird.

L. Nun bezeichnet mir doch einmahl alle Centriwinkel. K. (bezeichnen.)

L. Welcher von diesen Centriwinkeln mag wohl der größte unter allen seyn? K. Das sind lauter Winkel gleicher und ähnlicher Dreyecke und stehen gleichen Seiten gegenüber, sie müssen also alle einander gleich seyn.

L. So wie die Centriwinkel dieses Secksecks alle einander gleich sind, so sind die Centriwinkel jedes regulären Polygons einander gleich, weil es alle Mahl Winkel gleicher und ähnlicher Dreyecke sind und gleichen Seiten gegenüberstehen.

Fünfundfunfzigster Satz

Aufgabe.

L., (welcher Fig. 85. ohne die Kreislinie verzeichnet hat.) Wißt ihr denn auch, wie viel die drey Winkel eines Dreyecks zusammengenommen Grade haben? K. 180.

L. Da könnt ihr mir ja wohl ausrechnen, wie viel diese sechs Dreyecke da (Fig 85.) zusammengenommen Grade haben. Wer rechnet dieß geschwind aus? K. (Multipliciren 180 mit 6 und sprechen:) 1080.

 L. Gut!

L. Gut! Jetzt sagt mir geschwind, wie viel die um den Punct C herum liegenden Winkel betragen. K. 360 Grad.

L. Wie viel bleibt, wenn man 360 von 1080 abzieht? K. 720.

L. Nun könnt ihr mir sagen, wie viel die Vieleckswinkel, nämlich die Winkel A, B, D, F, G, E zusammengenommen Grade haben müssen. K. Gerade 720.

L. Richtig! Jetzt lösche ich alle diese Linien weg (die punctirten Linien Fig. 85. weglöschend) und ihr sagt mir, wie wir es anfangen müßten, wenn uns die Summe der Grade aller Winkel in diesem Sechsecke noch unbekannt wäre und wir sie suchen sollten. K. Da müßten wir 1) aus dem Puncte c gerade Linien in die Winkel des Sechsecks ziehen, damit wir lauter Triangel erhielten, darauf müßten wir 2) die Summe der Winkel dieser Triangel suchen und endlich 3) von dieser Summe 360 (als die Summe der Winkel die um den Punct c liegen, und nicht mit zu den Winkeln des Sechsecks gehören) abziehen. Der Rest würde uns die Summe der Winkel des Sechsecks angeben.

L. Das wäre recht! Nun sagt, wie viel Triangel wir aus diesem Achtecke (Fig. 86.) machen könnten, wenn wir aus dem Puncte c gerade Linien in die Winkel desselben zögen. K. Acht.

L. Wie oft müßten wir denn 180 Grad nehmen, wenn wir die Summe der Grade, welche die Win-

Winkel dieser acht Dreyecke zusammengenommen enthalten würden, erfahren wollten? K. Acht Mahl.

L Und wie viel Grade müßten wir von diesem Producte wieder abziehen wenn wir nur die Zahl der Grade der Polygonwinkel erhalten wollten? K. 360.

L. Das ist so viel als zwey Mahl 180. Wenn Wenn ich acht Mahl 180 habe, und davon zwey Mahl 180 wegnehme, wie oft habe ich denn da noch 180? K. Sechs Mahl.

L. Wie viel ist denn 180 mit 6 multiplicirt? K. 1080.

L. Das ist also die Zahl der Grade, welche alle Winkel dieses Achtecks zusammengenommen haben. Wer sagt mir geschwind, wie wir diese Zahl auf die kürzeste Art gefunden haben? K. Wir haben 180 mit 6 multiplicirt.

L. D. h. wir haben 180 mit der Zahl der Seiten dieses Vielecks weniger zwey multiplicirt. Und wenn man dieses immer so macht und nämlich 180 mit der Zahl der Seiten eines geradlinigten Vielecks, es mag übrigens regulär oder irregulär seyn, multiplicirt, so erhält man im Producte die Zahl, die uns die Grade aller seiner Winkel zusammengenommen angiebt. Nun sagt mir, wie wir auf die kürzeste Art die Summe der Grade der Winkel eines Neunecks erfahren können? K. Da dürfen wir nur 180 mit 7 multipliciren.

 L. Frey-

L. Freylich! Denn das wäre ja eben so viel, als wenn wir das Neuneck in neun solche Dreyecke (Fig. 87.) zerlegten, dann neun Mahl 180 Grade nähmen, und davon wieder 360 oder zwey Mahl 180 Grad, welche den Winkeln, die um den Punct x lägen, zugehörten, abzögen. — Jetzt rechnet mir aus, wie viel die Winkel in einem Fünfeck, Siebeneck rc. zusammengenommen Grade haben. — — —

Sechsundfunfzigster Satz.

Aufgabe.

L. Wer rechnet mir geschwind wieder aus und sagt mir, wie viel die Winkel dieses Sechsecks (Fig. 85.) zusammengenommen Grade haben? K. 720.

L. Wie verhalten sich denn die Winkel dieses Sechsecks, welches regulär ist, zu einander? K. Sie sind einander gleich.

L. Den wievielsten Theil von 720 Graden muß also jeder derselben haben? K. Den sechsten.

L. Sucht mir geschwind den sechsten Theil von 720. K. 120.

L. Jeder Winkel dieses regulären Sechsecks hält also —? K. 120 Grad.

L. Und so viel Grade hält ein Winkel eines jeden regulären Sechsecks, es mag dieses groß

oder

oder klein seyn, indem bey einem größern Sechsecke nur die Seiten länger, die Winkel aber nicht größer sind, als bey einem kleinern. Und so ist überhaupt in jedem regulären Polygon die Größe eines Polygonwinkels schon bestimmt, so daß z. B. ein Winkel in jeden gleichseitigen (regulären) Dreyecke 60, in einem Quadrate 90, in einem regulären Fünfecke 108, in jedem regulären Sechsecke 120 Grad haben muß, diese Figuren mögen übrigens so groß wie dieses Zimmer, oder so klein wie dieses Blatt Papier seyn. Könnt ihr mir denn wohl ausrechnen, wie groß ein Winkel von diesem regulären Achtecke (Fig. 86.) seyn muß? K. Ja.

L. Wie wollt ihr denn dieses machen? K. Wir suchen erst die Summe aller seiner Winkel und dividiren sie mit 8.

L. Warum gerade mit 8? K. Weil diese Figur acht Winkel hat.

L. So viel Winkel ein Polygon hat, so viel hat es, wie ihr schon wißt, auch Seiten. Ihr dividirt also die Summe der Winkel dieses regulären Achtecks durch die Zahl der Seiten, um zu erfahren, wie viel ein Polygenwinkel desselben Grade hat. Wenn ihr mir nun sagen solltet, wie man die Gradezahl eines Polygonwinkels überhaupt findet, wie würdet ihr da antworten? K. Man sucht erst die Summe aller Winkel des Polygons und dividirt diese durch die Zahl seiner Seiten (Winkel).

Siebenundfunfzigster Satz.

Aufgabe.

L. Wißt ihr denn noch, wie viel der Polygonwinkel eines Fünfecks Grade hat? K. 108.

L. Wenn wir ein reguläres Fünfeck verzeichnen wollten, so müßten wir damit anfangen, daß wir 2 Linien, die 2 Seiten desselben werden sollten, unter einen Winkel zusammen setzten. Wie viel Grade müßte dieser Winkel haben? K. 108.

L. Verfertigt einmahl einen Winkel von 108 Graden. K. (ziehen AB u. BC Fig. 16. Tab. IX)

L. Jetzt gebt jedem Schenkel dieses Winkels diese Länge (eine Linie (m n) von bestimmter Länge ziehend.) — Nun haben wir den Anfang zur Verzeichnung eines regulären Fünfecks gemacht, dessen Seite dieser gegebenen Linie (m n) gleich seyn soll. Was müssen wir denn nun zunächst thun, wenn wir in der Verzeichnung dieser Figur fortfahren wollen? K. Da müssen wir an den Punct C (A) wieder eine Linie so lang als AB (m n) unter einen Winkel von 108 Grad setzen.

L. Thut dieses. K. (ziehen CD).

L Nun will ich sehn, ob ihr das angefangene Fünfeck gar vollenden könnt. K. (ziehen DE u. EA gar.)

L. Ihr habt jetzt eine Aufgabe aufgelöst, wie lautet diese? K. Ein reguläres Fünfeck, wozu die Seite gegeben ist, zu beschreiben.

L. Wer

L. Wer sagt mir aber auch, wie man diese Aufgabe auflöst? K. Man sucht erstlich die Zahl der Grade des Polygonwinkels, hierauf setzt man 2 Seiten, wovon jede die gegebene Länge hat, unter diesem Winkel zusammen, an den Endpuncte des einen Schenkels dieses Winkels wird die 3te, daran die 4te, und daran endlich die 5te Seite immer unter einem Winkel vom 108 Grad gesetzt.

L. Das Verfahren ist richtig, aber mühsam, daher sollt ihr eine kürzere und bequemere Art, ein reguläres Fünfeck zu verzeichnen, lernen. Wenn ihr einmahl zwey Linien, welche Seiten eines regulären Fünfecks werden sollen, unter dem gehörigen Winkel (von 108 Grad) an einander gesetzt habt, so halbirt beyde Linien, errichtet auf ihrer Mitte senkrechte Linien, verlängert diese bis sie einander schneiden und beschreibt aus dem Durchschnittspuncte eine Kreislinie, die durch die 3 Endpuncte der Linien, die zu Seiten des Fünfecks bestimmt sind, geht. K. (thun dieses und verzeichnen Fig. 17. Tab. IX. ohne die Linien AB, BC und CD).

L. Jetzt dürft ihr nur die Linie ED noch 3 Mahl in dem Kreise herum tragen, so ist das verlangte Fünfeck fertig. K. (ziehen die Linien AB, BC und CD gar.)

L. Nun will ich aber sehn, wer mir das jetzige Verfahren, wodurch wir dieses reguläre Fünfeck zu Stande gebracht haben, recht pünctlich beschreikann. K (beschreiben das Verfahren.)

L. Dieses Verfahren gründet sich auf den Satz, daß sich um jedes reguläre Vieleck ein Kreis beschrei-

schreiben läßt. Wenn wir daher ein reguläres Fünfeck, dessen Seite uns gegeben ist, beschreiben sollen, so kommt es nur darauf an, daß wir den Halbmesser zu einem Kreise finden, worein dieses Fünfeck beschrieben werden kann, d. h. an dessen Peripherie wir die gegebene Seite gerade fünf Mahl herumtragen können. Diesen Halbmesser finden wir aber auf die angezeigte Art, indem wir die zwey unter dem gehörigen Winkel zusammengesetzten Seiten des Fünfecks als Sehnen eines Kreises betrachten.

Nun zeige man den Kindern, daß man jedes reguläre Polygon, wozu die Seite gegeben ist, auf eine ähnliche Weise beschreiben kann, und lasse sie dergleichen Figuren fleißig verzeichnen. Wäre z. B. die Aufgabe: Ein reguläres Zehneck zu verzeichnen, dessen Seite = mn (fig. 9. Tab. IX.) seyn soll: so wird 1) die Zahl der Grade des Polygonwinkels gesucht; 2) durch Hülfe des Transporteurs ein Winkel von der gefundenen Größe (144 Grad) verzeichnet und jeder seiner Schenkel = mn gemacht; 3) jeder dieser Schenkel halbirt; 4) auf jedem Halbirungspuncte eine senkrechte Linie errichtet und so weit verlängert, bis eine die andere schneidet; 5) aus dem Durchschnittspuncte ein Kreis beschrieben, der durch die 3 Endpuncte der 2 halbirten Linien geht, und 6) in diesem Kreise die Linie mn noch 8 Mahl herumgetragen.

Druckfehler.

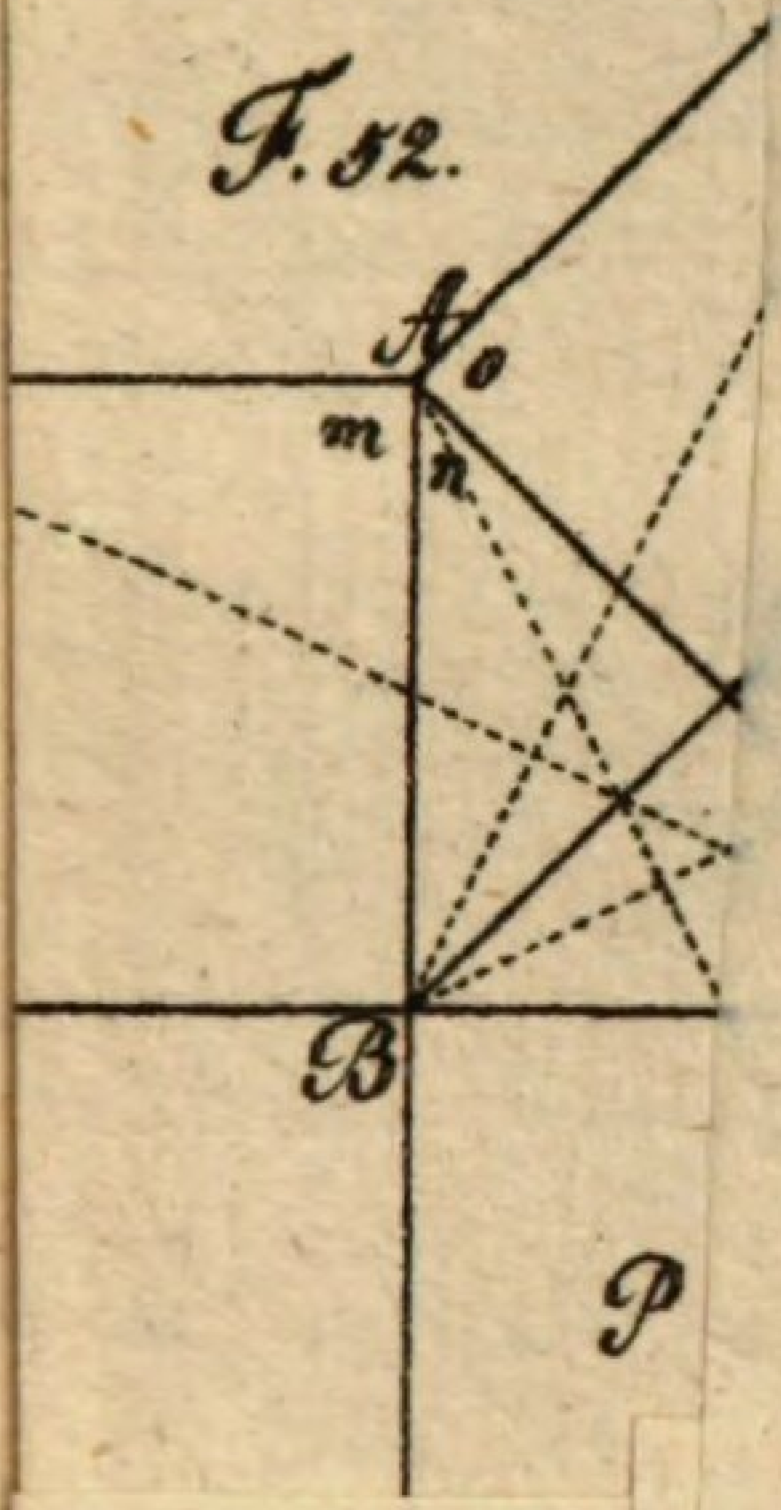
Seite	1	Zeile	10	v. o.	statt den lies denn
—	8	—	9	—	statt den lies denn
—	9	—	12	—	statt äußern l. äußere
—	11	—	3	—	st. Kinden l. Kindern
—	24	—	12	v. u.	streiche das Wort können weg.
—	26	—	6	v. o.	st. vorzeichnen l. verzeichnen
—	29	—	5	—	st. Umständen l. Umstande
—	42	—	7	v. u.	st. hineinschieben l. hineinschreiben
—	45	—	1	v. o.	st. ; setze ein ,
—	47	—	1	—	setze nach L ein (
—	49	—	2	—	streiche und weg
—	64	—	9	v. u.	setze statt des , ein ;
—	65	—	2	v. o.	st. verlängern l. verlängere
—	—	—	2	v. u.	st. von dem Gesagten lies Gesagte
—	78	—	1	v. o.	statt 25 lies 23
—	93	—	1	v. u.	statt von lies an
—	94	—	5	—	statt u lies n
—	143	—	9	v. o.	st. belieben l. Belieben
—	149	—	8	v. u.	nach Stücke setze ab
—	157	—	3	v. o.	nach 1K setze: (fig. 41) und nach ID setze: (fig. 42)
—	165	—	11	v. u.	statt habe lies hat
—	167	—	5	—	statt eine lies andere
—	173	—	11	v. u.	st. möchten l. mögen.

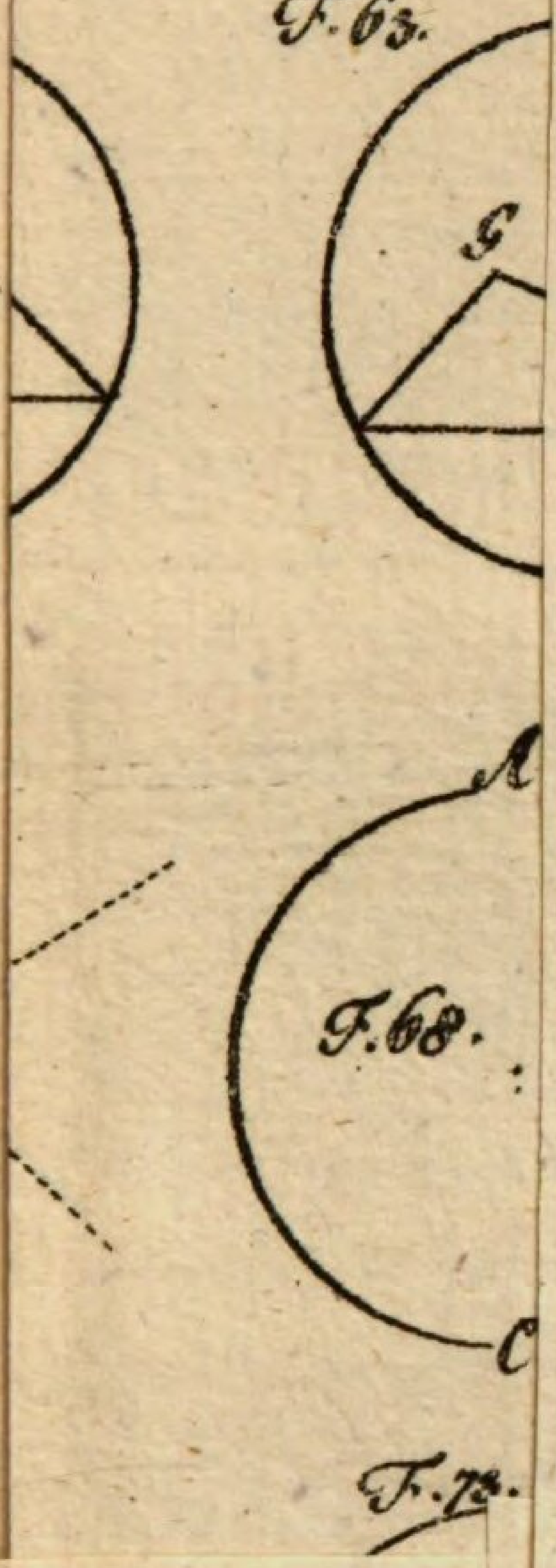
Einige minder bedeutende Druckfehler, z. B. ein hie und da fehlendes Comma, wird der Leser selbst leicht verbessern können.

Erlangen,
gedruckt bey Adolph Ernst Junge.

F. 2.
B
A
D
C
y z
F
E
F
F. 7.
n
o
n
p
G
H
D
F. 13.

F. 52.

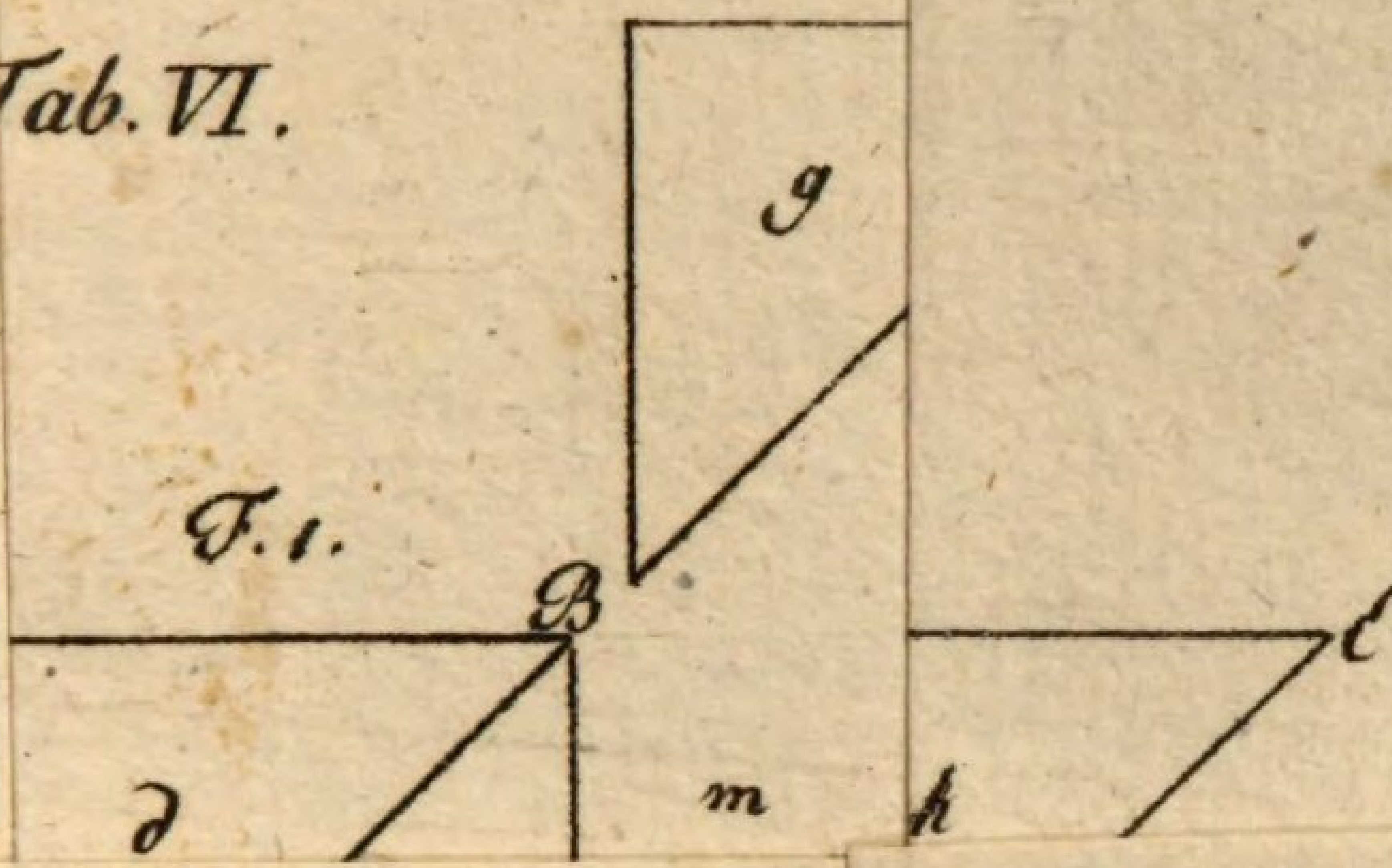


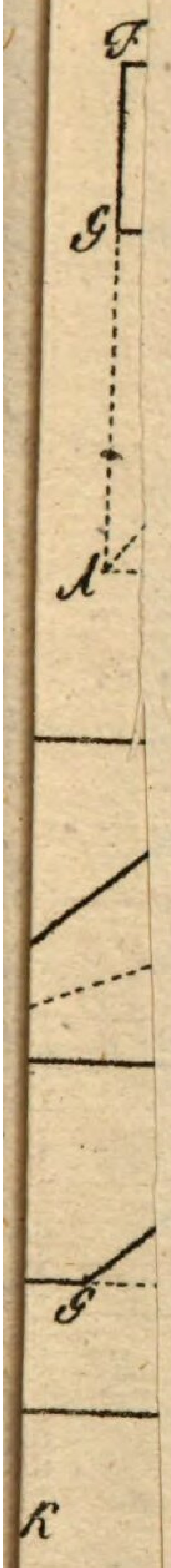


F.63.
g
A
F.68.
C

Tab. VI.

F. 1.




F
G
A
G
K

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Pöhlmann, Johann Paul,

Die ersten Anfangsgründe der Geometrie als Stoff zu Denk- und Sprechü
bungen benützt zum Gebrauche für ungeübte Lehrer in Bürgerschulen und den
untern Classen der Gymnasien herausgegeben
Bd.: 2,1

Fürth 1805

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.2389(2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11111157-7